De problem-solving-bundel

olympia

augustus 2012

1 algebra

1.1 ongelijkheden

Stelling 1.1. *(AM-GM-HM) Voor $n \in \mathbb{N}$ $a_1, ..., a_n > 0$ geldt:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

de triviale benodigdheden

* Kwadraten zijn positief

* ontbindingen

* maximum/minimum beschouwen van de variabelen

* zorgen dat de gelijkheidsgevallen niet verdwenen zijn en in die gevallen nog gelijkheid blijft gelden

(men mag dus de vraag niet te veel vereenvoudigen dat de laatste stappen niet waar meer zijn)

Voorbeeld 1.2. *(IMC 1999) Gegeven reële getallen $x_1, ..., x_n > -1$, met $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$. Bewijs dat*

$$x_1 + ... + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

Oplossing. Merk op dat

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Voor $x = x_i$ is $(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, aangezien $x_i > -1$. Tellen we dit nu op voor alle x_i dan komt er

$$(x_1^3 + ... + x_n^3) - \frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) + \frac{n}{4} \geq 0$$

$$\frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) \leq \frac{n}{4}$$

Na deling door $\frac{3}{4}$ geeft dit het te bewijzen. □

1. Bewijs dat $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ er geldt dat $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$ en zeg wanneer er gelijkheid geldt.

   voorbeeld

2. Bepaal alle drietallen (x, y, z) die voldoen aan $(x+y)^2 = z$ $(x+z)^2 = y$ $(y+z)^2 = x$

   voorbeeld

3. ABC is een driehoek met $P, Q, R \in [BC], [AC], [AB]$. TB:

$$\min\{[AQR], [BRP], [CQP]\} \leq \frac{1}{4} \cdot [ABC]$$

   link

4. Gegeven dat x, y, z positieve rele getallen zijn die voldoen aan $xyz = 32$, vind de maximumwaarde van

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2.$$

   link

5. Vindt alle positieve getallen zodat $a + b = ab$ en $\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \geq 0.5$.

   klik

6. (*)

   $a, b, c > 0$ zodat $\frac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = a + b + c$. Bewijs dat $\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$

   klik

7. (*)

   Zij a, b, c rele getallen zodat $ab+bc+ca \leq 3abc$. Bewijs dat $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + 3 \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)$

   klik

8. (*)

   Zij $n \geq 3$ en $a_2, a_3, \cdots, a_n > 0$ zodat

$$\prod_{i=2}^{i=n} a_i = 1.$$

   TB:

$$\prod_{i=2}^{i=n} (1 + a_i)^i > n^n.$$

   klik

9. (enkel passend)

   Bestaat er een polynoom $P(x)$ met 2012 reeele nulpunten zodat

$$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geq 3P(a)P(b)P(c)$$

   geldt $\forall a, b, c, \in \mathbb{R} | a + b + c = 0$?

   http://olympia.problem-solving.be/node/2018

Stelling 1.3. *(Cauchy-Schwarz [CS]) Voor* $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ *geldt:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^2.$$

Gelijkheid treedt op als en slechts als $\rho \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \leq 1.$

(de waarde $\frac{a_i}{b_i}$ *constant is voor alle i)*

Dit kan uiteraard worden vervormd in andere vormen zoals:

(Cauchy-Schwarz in Engelvorm) Voor $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *en* $b_1, ..., b_n > 0$ *geldt:*

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

hints:

* homogeniseren; zorgen dat de graad van iedere veelterm gelijk is om passende voorwaarden te mogen stellen en de gewone stellingen te kunnen toepassen

* substituties: vervangen van de variabelen door een combinatie van nieuwe variabelen om de ongelijkheid te vereenvoudigen

Voorbeeld 1.4. $a, b, c > 0$

TB:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Bewijs. Er zijn 2 variabelen in $[0, 1], [1, \infty]$ wegens het duivenhokprincipe. Stel dat dit a, b zijn.
Dan is $(a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq 3(a^2 + b^2 + 1)$ omdat $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$.
$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ vervolledigt het bewijs.

□

oefenen

1. Vind alle oplossingen $x, y, z \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010$ $x + y + z = \frac{3}{670}$

   klik

2. De strikt positieve rele getallen p, q, r voldoen aan $p+q+r = 1$. Bewijs dat $7(pq+qr+rp) \leq 2 + 9pqr$.

   klik

3. Zij $a, b, c > 0$ met $abc = 1$. Bewijs dat

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq 1.5$$

   klik

4. Zij a, b, c drie positieve rele getallen. Bewijs dat

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

   klik

5. Zij $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ met $xyz \geq 1$. Toon aan dat

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

   klik hier

6. (*)

   Bewijs dat voor alle positieve reele getallen a, b, c geldt dat

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

   klik hier

7. (*)

   $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ zodat $x + y + z = xy + yz + zx$ Bewijs dat $\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \leq 1$ en zeg wanneer er gelijkheid geldt.

   klik

8. (*)

   $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2$ TB: $ab + bc + ac \leq 1.5$

   klik

Stelling 1.5. *(Holder)*
Zij $P_1, p_2, \cdots, p_k \in \mathbb{R}^+ > 0$ en neem k rijen van n positieve, rele getallen met a_{ij} het element van de i^{de} rij en j^{de} kolom en $s = \frac{1}{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}}$ Dan geldt er dat

$$\prod_{i=1}^{k} \sqrt[p_i]{a_{i1}^{p_i} + \cdots + a_{i1}^{p_i}} \geq \sqrt[s]{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^s a_{2j}^s \cdots a_{kj}^s}$$

Stelling 1.6. *(Minkowski) Zij $p > r \in \mathbb{R}^+ > 0$ en neem k rijen van n positieve, rele getallen met a_{ij} het element van de i^{de} rij en j^{de} kolom. Dan geldt er dat*

$$\sqrt[r]{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^p)^{\frac{r}{p}}} \geq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^r)^{\frac{p}{r}}}$$

Stelling 1.7. *(gelijkheid bij gelijkheid)*
Wanneer men wil bewijzen dat het extremum optreedt, wanneer alle termen gelijk zijn, is het voldoende uit het ongerijmde een contradictie te bekomen.

Voorbeeld 1.8. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ *Vind het minimum van* $\sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{a_i^2 + \frac{1}{a_i^2}}$?
Bewijs. Stel dat het minimum optreedt bij $(a, b, x_3, x_4, \cdots, x_n)$ in te vullen voor $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ met $a \neq b$
(merk op dat we kunnen permuteren en dus vanaf er 2 getallen niet gelijk zijn)
Het is voldoende te tonen dat $(a, b) \to (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ zorgt dat de uitdrukking kleiner wordt.
$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} > 2\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{(\frac{a+b}{2})^2}}$
kwadraten en $AM - GM, CS$ toont aan dat de ongelijkheid strikt geldt als $a \neq b$.
Er geldt dus dat als het minimum optreedt, alle elementen gelijk zijn; $a_i = \frac{1}{n}$ en dus wordt het minimum $\sqrt{n^4 + 1}$.
***
merk op dat deze vraag ook een direct gevolg is van Minkowski : $\square$

niks beter dan zelf aan de slag te gaan

1. Vind alle $\alpha, \beta > 0$ zodat geldt $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n > 0$ dat $(\sum x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (\sum y_i^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \geq \sum x_i y_i$

   klik

2. Als $a, b, c > 0$ en $ab + bc + ca = 1$, bewijs dan dat

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

   klik

Stelling 1.9. *(Gewogen Jensen) Zij I een interval, $a_i \in I$, $k_i \in \mathbb{R}_0^+$ en f tweemaal afleidbaar. Als f convex is op I, dan is*

$$\frac{k_1 \cdot f(a_1) + \cdots + k_n \cdot f(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \geq f\left(\frac{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right).$$

Als f concaaf is op I, dan is

$$\frac{k_1 \cdot f(a_1) + \cdots + k_n \cdot f(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \leq f\left(\frac{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right).$$

Gelijkheid treedt op als en slechts als ofwel alle a_i gelijk zijn, ofwel de functie een rechte is.

gevolgen

Stelling 1.10. *(gewogen AM-GM) Voor alle $a_i, k_i > 0$ geldt dat*

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \geq \sqrt[k_1 + \ldots + k_n]{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}}.$$

Stelling 1.11. *(gewogen QM-AM) Voor alle $a_i, k_i > 0$ geldt dat*

$$\sqrt{\frac{k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 + \cdots + k_n a_n^2}{k_1 + \cdots + k_n}} \geq \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}.$$

Stelling 1.12. *(gewogen GM-HM) Voor alle $a_i, k_i > 0$ geldt dat*

$$\sqrt[k_1 + \ldots + k_n]{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}} \geq \frac{k_1 + \cdots + k_n}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} + \cdots + \frac{k_n}{a_n}}$$

Stelling 1.13. *(Gewogen Power-Mean Ongelijkheid) Als $i > j$ dan is:*

$$f_i(k_m, a_m) \geq f_j(k_m, a_m),$$

gelijkheid als en slechts als alle a_m gelijk zijn. Hierbij staat

$$f_j = \sqrt[j]{\frac{k_1 a_1^j + \cdots + k_n a_n^j}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}}$$

met f_0 het gewogen GM, en $f_{\pm\infty}$ gewoon minimum en maximum resp.

1. Zij $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rele getallen groter of gelijk aan 1. Bewijs dat

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \cdots + \frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}+1}.$$

klik

1.2 Stelling van Karamata

Deze stelling is de algemenere stelling van Jensen en tonen we hier op zijn algemeenst en zodoende zeer sterke ongelijkheid, de werkelijke stelling van Karamata zegt normaal enkel dat
als $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ majoriseert, dat dan geldt dat
$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$ als f convex is over het interval $[x_1, x_n]$.
De volgende veralgemening die we geven noemen we de uitgebreidde stelling van gewogen Karamata.

Stelling 1.14. *(stelling van Karamata)*
gewogen majorisatie:
Zij $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ *en* $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_m \\ b_1 & b_2 & ... & b_m \end{pmatrix}$ *2 gewogen "reeksen", dan majoriseert* x *de "reeks"*y *als geldt dat*
$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_m$, $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$,
$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ *and* $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_m$, *alsook*
voor alle indices u *and* v *en alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *waarvoor geldt dat* $0 \leq \alpha \leq 1$ *en* $0 \leq \beta \leq 1$ *gekozen zodat*
$a_1 + a_2 + ... + a_{u-1} + \alpha a_u = b_1 + b_2 + ... + b_{v-1} + \beta b_v$, *geldt dat*
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{u-1}x_{u-1} + \alpha a_u x_u \geq b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_{v-1}y_{v-1} + \beta b_v y_v$.
We schrijven dit als $(x) \succ (y)$
Nu zegt de uitgebreidde stelling van gewogen Karamata :
Neem de gewogen "reeks"$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ *die de gewogen "reeks"*$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_m \\ b_1 & b_2 & ... & b_m \end{pmatrix}$ *majoriseert.*
Zij I *een interval die de getallen* x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m *bevat en* f *een functie die tweemaal afleidbaar is. Als* f *convex is op* I, *dan is*
$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n) \geq b_1 f(y_1) + b_2 f(y_2) + ... + b_m f(y_m)$.
Bij een concave functie geldt dit in de andere richting.

hint
Probeer een schets/grafiek te maken om andere eigenschappen van de functie te bekomen die handig zijn om de vraag op te lossen.

1. Zij I een interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een convexe functie. D.w.z. $\forall a, b \in I$ en $\forall \lambda \in [0,1]$ geldt

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b)) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

   Bewijs dan dat $\forall a, b, c \in I$ met $a < b < c$ geldt dat

$$f(b) + f(a + c - b) \leq f(a) + f(c).$$

   klik

2. Er geldt dat $a + b + c = 1$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
   Vind het maximum van $\frac{1}{a^2-4a+9} + \frac{1}{b^2-4b+9} + \frac{1}{c^2-4c+9}$.

   klik

3. Als $n \geq 2$ een natuurlijk getal is en $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{2n+1}$ zijn reele getallen, bewijs dan dat

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \ldots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} \leq \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

   klik

Stelling 1.15. *(Orde-ongelijkheid voor sommen) Zij* $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, $\cdots$,$x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$ *dan geldt voor alle permutaties* σ, τ*:*

$$\sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \cdots & b_{\sigma(n)} \\ c_{\tau(1)} & c_{\tau(2)} & \cdots & c_{\tau(n)} \\ \cdots & & & \\ x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} & \cdots & x_{\tau(n)} \end{pmatrix}.$$

Stelling 1.16. *(Chebychev) Zij* $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, $\cdots$,$x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$ k *gelijkgesorteerde rijen, dan geldt :*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)\cdots(\sum_{i=1}^{i=n} x_i) \leq n^{k-1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdots x_i.$$

Stelling 1.17. *(Orde-ongelijkheid voor producten) Zij* $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, $\cdots$,$x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$ *dan geldt voor alle permutaties* σ, τ*:*

$$\prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & & & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \leq \prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \cdots & b_{\sigma(n)} \\ c_{\tau(1)} & c_{\tau(2)} & \cdots & c_{\tau(n)} \\ \cdots & & & \\ x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} & \cdots & x_{\tau(n)} \end{pmatrix}.$$

terug een rij helpers om in te oefenen

1. Zij $x_1 \leq ... \leq x_n$ en $y_1 \leq ... \leq y_n$. Bewijs dat voor elke permutatie σ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_{\sigma(i)})^2.$$

   klik

2. Zij $a_k > 0 \in \mathbb{N}$ met alle a_k verschillend. Bewijs dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   klik

3. Zij $x_1, \ldots, x_n$ rele getallen zodat $|x_1 + \cdots + x_n| = 1$ en $|x_i| \leq \dfrac{n+1}{2}$ voor alle i. Bewijs dat er een permutatie σ bestaat zodat

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i x_{\sigma(i)}\right| \leq \frac{n+1}{2}.$$

   klik

Stelling 1.18. *(Schur)* $\forall a,b,c,r>0$ $a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b)\geq 0$ *met gelijkheid a.e.s.a* $a=b=c$
of $f(a)(a-b)(a-c)+f(b)(b-a)(b-c)+f(c)(c-a)(c-b)\geq 0$ *met* f *een strikt stijgende functie.*

Stelling 1.19. *(Muirhead) Als* $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ(b_1,b_2,\cdots,b_n)$*, en* $x_i>0$*, dan geldt:* $\forall x_i\in\mathbb{R}^+:\sum_{sym}x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\geq\sum_{sym}x_1^{b_1}\cdots x_n^{b_n}$

minder belangrijke stellingen:

Stelling 1.20. *(Bernoulli)* $\forall x_i\geq -1$ *met alle* x_i *hetzelfde teken geldt dat* $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{n}x_i$

Stelling 1.21. *(Maclaurin) Zij* $S_k=\frac{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik}}{\binom{n}{k}}$ *(gemiddelde van de termen van de ontbinding van* $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ *met graad* k*) Dan geldt dat* $f_i\geq f_j$ *als* $i\leq j$ *met* $f_i=\sqrt[i]{s_i}$

Stelling 1.22. *(Newton) Bij de eig. van Maclaurin geldt ook dat* $S_k^2\geq S_{k-1}S_{k+1}$

1. Zij x, y, z positieve reele getallen zodat $xyz = 1$. Bewijs dat

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

klik

2.

Stelling 1.23. *(extremeaaltechniek)*
Als een functie f convex of lineair is in alle variabelen $x_1, \cdots, x_n$,
geldt dat het maximum optreedt wanneer alle variabelen gelijk zijn aan het minimum of maximum.

Voorbeeld 1.24. *(IMOLL Peter Vandendriessche)*
Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal en zij $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \geq 0$. Toon aan dat

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \left(\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right)^2 \geq \sqrt[n]{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \cdots (x_n^2 + y_n^2)}.$$

Bewijs. □

oefenen

1. Als $k \geq v, w, x, y, z \geq h > 0$, toon dan aan dat

$$(v+w+x+y+z)\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq 25+6\left(\sqrt{\frac{h}{k}}-\sqrt{\frac{k}{h}}\right)^2.$$

   Wanneer treedt gelijkheid op?

   klik

2. (*)

   Voor iedere $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ geldt dat $x_i > 0, x_i y_i > z_i^2$ waarbij alle getallen reel zijn. Bewijs dat: $\frac{n^3}{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)-(\sum_{i=1}^n z_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i - z_i^2}$ ** Op de IMO was dit voor het specifieke geval $n = 2$.

   klik

de laatste loodjes bij onze ongelijkheden

Stelling 1.25. *(Lagrange multipliers)*
Zij gegeven dat $f(a_1,...,a_n) = r$ *dan kan men extremums van de functie* $g(a, b \cdots, x)$ *bekomen door het oplossen van* $g(a_1,...,a_n) + \lambda[f(a_1,...,a_n) - r]$ *af te leiden naar* 1 *variablele,*
wiens afgeleide 0 *moet zijn om een extremum te bekomen, waardoor bij symmetrische functies de juiste waarde van* λ *het gevraagde simple aantoont.*

Stelling 1.26. *(EMV-stelling) Zij* f *een continu functie en* $[f]$ *is de som van de afgeleiden in iedere variabele. De ongelijkheid* $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ *met* $x_i \geq 0$ *geldt als :*
$(i).f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ *if* $x_1x_2...x_n = 0$. $(ii).[f] \geq 0 \ \forall x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.
(geldt niet noodzakelijk in omgekeerd)

Voorbeeld 1.27.

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2(b^2 + c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)) + c^2d^2$$

Equivalent met $F = \sum_{cyc} a^4 + 2abcd - \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 0$

Bewijs. i $d = 0$, dan $AM - GM$ geeft dat het klopt.
ii $[F] = 4\sum_{cyc} a^3 + 2\sum_{cyc} abc - 2\sum_{cyc} ab(a + b) \geq 0$ (sommatie van Schur-ongelijkheden)

□

1. $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a + b + c + d = 19$ en $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 91$.Vind het maximum dat mogelijk is voor de uitdrukking $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

   klik

Diverse Ongelijkheden oefeningen

1. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve rele getallen zodat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1$. Bewijs dat

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n))}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

   klik

2. $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ geldt voor de positieve getallen a, b, c.

   Vind het maximum dat $(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab)$ kan aannemen.

   klik

3. Gegeven zijn reele getallen $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
   Definieer $d_i = max\{a_j | 1 \leq j \leq i\} - min\{a_j | i \leq j \leq n\}$ voor elke i tussen 1 en n en laat $d = max\{d_i | 1 \leq i \leq n\}$.

   (a) Bewijs dat voor alle getallen $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$max\{|x_i - a_i| | 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}$$

   [1]

   (b) Bewijs dat er zo'n rij $(x_n)_n$ was zodat er gelijkheid geldde in [1].

   klik

1.3 polynoom vergelijkingen

Bij zowel polynoom- als functievergelijkingen zijn er 2 grote dingen die men moet doen:

*aantonen dat de andere mogelijkheden niet voldoen

* bewijzen dat de gevonden functies altijd voldoen aan je vergelijking.

Bij veeltermvergelijkingen geeft men het voordeel dat men de hoogstegraadsterm kan bekijken en hieruit conclusies trekken en als dit begrensd is, de volledige polynoom te kunnen invullen. (wat men niet kan bij een functievergelijking)

oefeningen

1. Vind alle veeltermen $P(x)$ met rele cofficinten die voldoen aan

   $$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

   voor alle drietallen a,b,c van rele getallen met $ab+bc+ca=0$.

   klik

1.4 functievergelijkingen

1.5 rijen

Een onderwerp met geen specifieke theorie.

Vaak komt er iets voor uit de algemene combinatoriek aan te pas zoals inducties, contradictie en dergelijke.

Een recursie op stellen en dergelijke komt niet puur voor.

Er is dus niks beter dan er goede voorbeelden van te zien:

1. Vind het kleinste natuurlijk getal met de volgende eigenschap: er bestaat geen rekenkundige rij van 1999 rele getallen die precies n gehele getallen bevat.

   klik

2. Definieren we een rij van rijen als volgt: $R_1 = 1$ en als $R_{n-1} = (a_1, \ldots, a_s)$, dan is $R_n = (1, 2, \ldots, a_1, 1, 2, \ldots, a_2, 1, 2, \ldots, \ldots, \ldots, 1, 2, \ldots, a_s, n)$. Bijvoorbeeld, $R_2 = (1, 2)$ en $R_3 = (1, 1, 2, 3)$. Bewijs dat als $n \geq$, dan is de k-de term van links in de rij R_n gelijk aan 1 als en slechts als de k-de term van rechts in de rij R_n verschillend is van 1.

   klik

3. Zij $a_1, a_2, \cdots$ een rij van positieve rele getallen. Veronderstel dat er een natuurlijk getal s is zodat $a_n = max\{a_k + a_{(n-k)} | 1 \leq k \leq n-1\}$ voor alle $n > s$. Bewijs dat er natuurlijke getallen l en N bestaan met $l \leq s$ en zodat $a_n = a_l + a_{(n-l)}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   klik

4. Zij $s_1, s_2, s_3, \ldots$ een strikt stijgende rij van natuurlijke getallen zodat de subrijen $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ en $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$ beiden rekenkundige rijen zijn. Bewijs dat de rij$s_1, s_2, s_3, \ldots$ zelf een rekenkundige rij is.

   klik

5. Zij n een natuurlijk getal en zij $a_1, a_2, \cdots, a_n$ verschillende natuurlijke getallen zijn. Er zijn $n-1$ getallen tussen 1 en $\sum_{i=1}^{i=n} a_i - 1$ gekozen in de verzameling M waar mensen hem willen vangen. De sprinkhaan start in het punt 0 en maakt n sprongen met de lengten a_1 tot a_n, bewijs dat hij die volgorde kan kiezen zodat hij nergens wordt gevangen in een punt van M.

   klik

Verder kan men zoeken voor RIJvoorbeelden voor extra problemen indien gewenst.

2 getaltheorie

Stelling 2.1. *(LTE: Lifting The Exponent Lemma)*
Er zijn enkele gevallen die we hier opsommen, die samen het totale LTE geven. Hierbij wordt met het symbool $v_p(x)$ het (exacte) aantal factoren p bedoeld in het getal x. bvb. $v_3(63) = 2$.
Zij p een priemgetal number en $x, y \in \mathbb{Z}$ die geen veelvoud zijn van p. Dan geldt dat
a) $\forall n \in \mathbb{N}$ *als*

- $p \neq 2$ *en* $p \mid x - y$, *dan*
$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$
- $p = 2$ *en* $2 \mid x - y$, *dan*
$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ *die oneven zijn en zodat* $p \mid x + y$, *geldt er dat*
$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n).$$

Stelling 2.2. *(stelling van Zsigmondy)*

Stelling 2.3. *De stelling van Zsigmondy voor verschillen, zegt dat als $a > b > 0$ natuurlijke getallen zijn die relatief priem zijn en zei $f(n) = a^n - b^n$ met $n \in \mathbb{N} > 0$. Dan heeft $f(n)$ een priemfactor die niet voorkomt in $f(k)$ voor iedere $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ uitgezonderd in enkele speciale gevallen:*

$a + b = 2^z$ en $n = 2$, want $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ en de factor 2 zit in $a - b$.

$a = 2, b = 1$ en $n = 6$ want 63 bevat enkel priemfactoren $2^3 - 1 = 7, 2^2 - 1 = 3$

de stelling van Zsigmondy voor sommen:
op analoge wijze geeft $a^n + b^n$ namelijk een priemfactor die voor geen enkele kleinere $k \in \mathbb{N}$ in $a^k + b^k$ zit, met uitzondering van $a = 2, b = 1, n = 3$.

1. Bepaal alle viertallen (a, b, p, n) van positieve gehele getallen $(a > 0, b > 0, p > 0, n > 0)$, zodanig dat p een priemgetal is en $a^3 + b^3 = p^n$.

   link

2. Bestaat er een natuurlijk getal n zodat n precies 2000 priemdelers heeft en $n|2^n + 1$?

   link

3. Bepaal alle drietallen (a, m, n) van natuurlijke getallen zodat $a^m + 1|(a + 1)^n$.

   link

4. Zij $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschillende priemgetallen groter dan 3.
   Toon aan dat $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ minimum 4^n delers heeft.

   link

Stelling 2.4. *(Pellvergelijkingen)*
De vergelijking $x^2 - dy^2 = 1$ heeft oneindig veel oplossingen als $d \in \mathbb{N}$ en geen volkomen kwadraat is. Deze oplossingen zijn van de vorm (x_n, y_n) met
$x_n = \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})^n+(x_1-y_1\sqrt{d})^n}{2}$ *en* $y_n = \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})^n(x_1-y_1\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}}$

uitgebreide pellvgl:

als $x^2 - ky^2 = -1$ een oplossing heeft (dit kan als $k \equiv 1 \pmod 4$)

Dan noemen we de primitieve oplossing (x_0, y_0) zoals bij de normale pellvgl.

We hebben dat $x_m + y_m\sqrt{k} = (x_0 + y_0\sqrt{k})^{2m+1}$ voor $m \geq 1$.

Bij $x^2 - ky^2 = n$ noteren we (a_0, b_0) als primitieve oplossing van deze vergelijking,

en (x_m, y_m) de m^{de} oplossing van $x^2 - ky^2 = 1$,

dan moeten we $a_m + b_m\sqrt{k} = (a_0 \pm b_0\sqrt{k})(x_m \pm y_m\sqrt{k})$ uitwerken voor de andere oplossingen van de eerste pellvergelijking: a_m, b_m.

(a) Bewijs dat er oneindig veel natuurlijke getallen n bestaan zodat $p = nr$, met p en r respectievelijk de halve omtrek en de straal van de ingeschreven cirkel een driehoek met gehele zijdelengtes.

link

3 meetkunde

3.1 basis

4 combinatoriek + algemene problem-solving

4.1 basis

dubbeltellen

Men kan bepaalde eigenschappen combinatorisch bekijken om eigenschappen elegant te bewijzen.

* Het is belangrijk dat men dus de klassieke formules om te tellen kent:
k elementen in volgorde plaatsen met keuze uit n elementen kan op $\frac{n!}{(n-k)!}$ manieren,

indien elementen meerdere keren mogen voorkomen, hebben we n^k manieren om rijen te vormen van k elementen

indien de volgorde niet belangrijk is, hebben we $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ manieren om k elementen te selecteren uit n waarden

het aantal permutaties van een set $\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$ waarbij a_i k_i keer voorkomt en er in totaal n elementen zijn, is gelijk aan $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!}$

Deze linken op 2 manieren aan een zelfde probleem, kan leiden naar een contradictie of een ongelijkheid.

extremaalprincipe

Men bekijkt het kleinste of grootste element van een verzameling en door naar bepaalde eigenschappen te kijken of bewerkingen uit te voeren,

zien we dat er een groter/ kleinere waarde is, zodat ons extremum fout is, waardoor er ∞ veel elementen waarden zijn

OF de vraag onmogelijk is.

We kunnen een oneindige afdaling doen bvb. om te zien dat er geen enkele waarde is die voldoet.

identiteiten

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

$n^4 + 4x^4 = (n^2 + 2x^2 - 2xn)(n^2 + 2x^2 + 2xn)$ (identiteit van Sophie-Germaine)

$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{i=k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}$ met

$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + p_0$ en $n = n_k p^k + \cdots + n_0$

(indentiteit/stelling van Lucas)

$ap + bq$ met $ggd(p, q) = 1$ en $a, b \in \mathbb{N}$ kan alle waarden groter dan $pq - q - p$ aannemen, $pq - p - q$ is de grootste waarde die niet zo te schrijven is. (postzegelidenteit)

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n$ (stelling/ identiteit van Stirling) [vrij juist voor grote waarden]

Het principe van inclusie exclusie (PIE)

Zij $A1, A2, \cdots, A_n$ eindige verzamelingen. Dan geldt

$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| =$

$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$

$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n|$

$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

$\cdots$

$+(-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

1. Zij n een oneven natuurlijk getal groter dan 1 en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gehele getallen.

   Voor iedere permutatie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiren we $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$.

   Bewijs dat er - voor iedere a - een permutatie $b \neq a$ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ bestaat zodat $n!$ een deler is van $S(a) - S(b)$.

   link

2. Definieer
   $$a_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$$
   voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ en stel $b_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Toon aan dat
   $$b_n = \frac{\sqrt{2n^2+2}}{\sqrt{n^2+2n+2}}$$
   en dat
   $$\frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{n^3}.$$
   link

3. $n, k \in \mathbb{N}$ en S is een verzameling van n punten in een vlak.

   Dit op zo'n wijze dat er geen 3 punten collineair zijn en ieder punt A minimum k punten heeft die op een zelfde afstand van A liggen.

   Bewijs dat $k < 0.5 + \sqrt{2n}$

   link

4.2 bedekkingen

Soms wordt in een vraag de mogelijkheid om iets te bedekken gevraagd.

Door een kleuring te gebruiken (enkele vakken in groepen verdelen) en eigenschappen zoals de pariteit te bekijken per object,
probeert men te bewijzen dat het al dan niet kan.

1. We verdelen een vierkant in enkele rechthoeken die heel het vierkant bedekken zonder overlapping. Bewijs dat als iedere lijn // met een zijde van het vierkant het binnenste van een rechthoek snijdt, niet alle rechthoeken aan de omtrek van het vierkant grenzen.

   link

2. Bepaal alle $m \times n$ rechthoeken die kunnen bedekt worden met "haken" zoals aangegeven in de figuur, die bestaan uit 6 eenheidsvierkanten (zie figuur op volgende bladzijde). Rotaties en spiegelingen van haken is toegelaten. De rechthoek dient bedekt te zijn zonder gaten noch overlappingen en geen enkel stuk van een haak mag buiten de rechthoek vallen.

   link

3. We hebben een $999 * 999$ bord waarop we een stuk plaatsen die op de volgende manier beweegt: het kan naar een ander vlakje gaan van het bord als de 2 vierkanten een zijde gemeenschappelijk hebben en iedere stap staat loodrecht op de vorige (men stapt dus nooit in 1 keer over een $1 * 3$rechthoek). Men wil een zo lang mogelijke cyclus maken,waarbij men ieder vlakje slechts 1 keer bewandelt en eiindigt bij het eerste vlakje (een gesloten kring dus). Hoeveel vakken kan die cyclus maximaal bevatten?

   link

4. Een trapvormige doos met 3 treden van breedte 2 is gemaakt uit 12 eenheidskubusjes. (volgende bladzijde zijaanzicht in zwart).
   Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor het mogelijk is om een kubus met zijde n te maken als je slechts beschikt over dergelijke bouwstenen.

   link

haken

Trapvormige doos (dikte 2)

4.3 inductie

Bij inductie wordt een uitdrukking bewezen voor alle natuurlijke getallen vanaf k, dit door het te bewijzen voor k. (inductiebasis IB)
Vervolgens als het geldt voor n, bewijst men dat het ook geldt voor $n+1$.

Bij volledige inductie bewijst men bij de tweede stap dat de vraag geldt voor $n+1$ als het waar was $\forall i \in \{k, k+1 \cdots, n\}$

Voorbeeld 4.1. *(kleine stelling van Fermat) Er geldt dat* $n^p \equiv n \pmod{p}$ *als* p *priem is* $\forall n \in \mathbb{N}$.
Bewijs. Voor $n = 0$ en 1 is de vraag de triviaal. (IB)

Als de vraag geldt voor n, bewijzen we dat $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$.

Lemma: Er geldt dat $p | \binom{p}{i}$ als $0 < i < p$ omdat $i!, (p-i)!$ geen factoren p bevatten.

$(n+1)^p = n^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} n^i \equiv n^p + 1 \equiv n+1 \pmod{p}$ door de inductiebasis en ons lemma.
Met inductie geldt de stelling van Fermat nu voor alle getallen $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

vb.'en

1. $n \in \mathbb{N}$, bepaal alle getallen x waarvoor geldt dat

$$0 = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \cdots + \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!}$$

link

2. k is een vast natuurlijk getal.
Een winkelketen wil zoveel mogelijk sombrero's verkopen.
Iedere klant kan 2 anderen een sombrero doen kopen na zijn aankoop (het telt niet als de klant door iemand anders al overhaald was).
Iedere klant die zo (direct of via keten) minimum k personen een sombrero liet kopen, wint een DVD. Bewijs dat wanneer men n sombrero's verkocht, men maximaal $\frac{n}{k+2}$ DVD's geeft moeten weggeven.

link

3. $n > 0$ is een natuurlijk getal .
Op een balans willen we gewichten van $2^0, 2^1, \cdots 2^{n-1}$ kilo plaatsen zodat ieder gewicht elk op zijn beurt wordt geplaatst op zo'n wijze dat de rechtste schaal nooit zwaarder weegt dan de linkse.
Hoeveel manieren zijn er hiervoor?

link

4. Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}_0$ de verzameling $\{2, 3 \cdots, 3n+1\}$ verdeeld kan worden in n triplets die de zijden van een stompe driehoek zijn.

link

5. Voor elk positief geheel getal n wordt S(n) als volgt gedefinieerd: S(n) is het grootste positieve gehele getal zodanig, dat voor elk natuurlijk getal $k \leq S(n)$ het getal n^2 te schrijven is als de som van k kwadraten van positieve gehele getallen. (a) Bewijs dat $S(n) \leq n^2 - 14$ voor alle $n > 4$. (b) Bepaal een getal n waarvoor geldt $S(n) = n^2 - 14$. (c) Bewijs dat er oneindig veel positieve gehele getallen zijn waarvoor geldt $S(n) = n^2 - 14$.

link

6. In het gecoordinatiseerde vlak beschouwt men een eindige verzameling roosterpunten V .
Is het mogelijk alle punten van V met 1 van beide kleuren, rood of wit, te kleuren zo, dat aan de volgende voorwaarde is voldaan: voor elke rechte D evenwijdig aan 1 van de coordinaatassen is de absolute waarde van het verschil tussen het aantal rode punten en het aantal witte punten dat op D ligt kleiner dan of gelijk aan 1.

link

4.4 invariantie en contradictie

Wanneer men wil bewijzen dat iets niet kan bij een combinatorische vraag, zijn er enkele manieren die vaak werken:

I Men zegt vanuit het ongerijmde dat de vraag wel kan opgelost worden en door de eigenschappen van de oplossing te bekijken,
bekomt men een contradictie waardoor er geen oplossing kon zijn (het ongerijmde was fout)

II Men bekijkt een eigenschap die invariant is in de vraag, waarbij die eigenschap bij de start en het einde verschillend is, waaruit volgt dat we het einde nooit kunnen bereiken.

III Men gebruikt een eigenschap die monotoon is bij iedere stap met een minimaal verschil, wanneer de eigenschap begrensd is, zijn er slechts een eindig aantal oplossingen.

Voorbeeld 4.2. *We hebben de getallen van* 1 *tot* 2012^9 *in een pot gestoken.*
Iedere keer als we 2 *getallen* x *en* y *eruit halen, worden ze vervangen door* $(x-1006)(y-1006)+1006$ *en steken dit ene getal terug in de pot.*
Welk getal kunnen we vinden als er slechts 1 *getal meer in de pot zit?*

Bewijs. Merk op dat het getal 1006 en x vervangen wordt door 1006 en dit getal invariant blijft (in de pot terug wordt gestoken).

Dit getal blijft dus in de pot en zal het laatste getal 1006 zijn.

□

1. 5 Lege emmers met een inhoud van 2 liter staan op de hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. Assepoester en haar boze stiefmoeder voeren afwisselend een stap uit.
   De stiefmoeder mag bij haar stap telkens 1 liter water verdelen over de 5 emmers zoals ze wil.
   Daarna mag Assepoester 2 emmers die naast elkaar staan kiezen en ledigen.
   Indien een emmer kan overlopen door de stiefmoeder wint ze, in het andere geval Assepoester, wie heeft een winnende strategie?

   link

2. Zij $r \geq 2$ een vast natuurlijk getal, en zij F een oneindige familie van verzamelingen, allemaal van grootte r, en geen twee ervan zijn disjunct. Bewijs dat er een verzameling bestaat van grootte $r - 1$ die iedere verzameling uit F snijdt.

   link

3. We hebben n dubbelkleurige stenen die we plaatsen in een rij. Bij de start wijzen ze allen met hun witte kant naar boven en in iedere stap kiezen we een witte steen met 2 buren , waarna we de buren omdraaien en de witte steen wegnemen. (de stenen zijn zwart-wit bvb) Bewijs dat we $n - 2$ beurten lang kunnen spelen aesa $3 \nmid n - 1$.

   link

4. We hebben een eindig aantal punten in het vlak waarvan er geen 3 collineair zijn, die we met S noteren. Een windmolen is een proces dat begint met een rechte l die door 1 punt $P \in S$ gaat. De lijn draait et de klok meer om het draaipunt P to er voor't eerst een ander pnt van S op deze lijn ligt, dat nieuwe punt wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dat Q een klap van de molen krijgt. De lijn draait nu met de klok mee om Q en de windmolen draait zo oneindig door. Laat zien dat we punt P van S en een lijn l door P kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van S ∞ veel klappen van de molen krijgt.

   link

4.5 duivenhokprincipe

Zijn $n, k \in \mathbb{N}_0$.
Als men n duiven verdeelt over k duivenhokken, dan bestaat er een duivenhok dat minstens $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ duiven bevat.

1. Bewijs dat iedere deelverzameling met 55 elementen uit $\{1, 2, \cdots, 100\}$ minimum 2 elementen heeft met verschil 9.

   link

2. 6 Vragen werden gesteld op een IMO, zodat ieder paar van problemen door meer dan 40 Niemand kon alle vragen. Bewijs dat er minimum 2 deelnemers 5 vragen oplosten. *** Geldt dit ook als we ≥ 0.4 hebben?

   link

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn reeele getallen zodat $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Bewijs dat, $\forall k \in \mathbb{N}$ zodat $k \geq 2$, er gehele getallen $a_1, a_2, \cdots a_n$ bestaan, niet allen gelijk aan 0, zodat $|a_i|\ lek1$ voor alle i en zodat $|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$.

   link

4. 21 meisjes en 21 jongens deden mee in een wiskunde-competitie. Het bleek dat iedere deelnemer maximum zes problemen had opgelost, en voor iedere 2 deelnemers bestaande uit een jongen en een meisje, was er minstens n probleem dat zowel door de jongen als het meisje was opgelost. Toon aan dat er een probleem was dat opgelost werd door minstens drie jongens en drie meisjes.

   link

4.6 winnende strategieen

Bij een vraag moeten we bewijzen dat iemand een winnende strategie heeft bij een spel,
dit kan door een kleuring of modulorekenen of andere elegante eigenschappen die worden uitgebuit.

stelling van Zermelo

Deze stelling zegt dat ieder spel tussen 2 personen waar toeval niet in meespeelt, geen gelijkspel mogelijk is en de spelers elk op hun beurt een zet doen:
1 van de 2 spelers geeft dan een winnende strategie.

vb.'en

1. Het $Y2K$ spel wordt gespeeld op een 1×2000 rooster als volgt: twee spelers schrijven elk op beurt een S of een O op een leeg vakje. De eerste speler die eerst drie opeenvolgende vakjes kan maken met SOS wint het spel. Als alle vakjes gevuld zijn zonder SOS te produceren, dan eindigt het in een gelijkspel. Als de ene speler begint, bewijs dan dat de andere speler een winnende strategie heeft.

   link

2. We beschouwen een polynoom $f(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + \cdots + a_1x + a_0$.
   Albert Einstein en Homer Simpson spelen een spel waarbij ze om hun beurt 1 v.d. coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{2011}$ een waarde geven. Albert start.
   Na 2012 zetten is het spel gedaan, wanneer alle coefficienten ingevuld zijn.
   Homer wil dat $f(x)$ deelbaar is door $m(x)$ en Einstein wint als dit niet zo is.
   (a) Wie kan winnen als $m(x) = x - 2012$?
   (b) Wat als $m(x) = x^2 + 1$?

   link

4.7 grafentheorie

Een graaf bestaat uit een verzameling V van knopen of vertices, en uit een eindige verzameling E van zijden of edges. Alle zijden zijn paren van knopen. Twee knopen X, Y zijn verbonden als er zijde $\{X, Y\}$ (XY) is.
Hierbij geven we wat uitleg over de terminologie:

- Een propere graaf is een een graaf waarbij iedere zijde verbonden is met een andere zijde en geen enkel punt met zichzelf verbonden is.
- Een gerichte graaf is een graaf waarbij de zijden gericht zijn.
- Een complete graaf K_n is een propere graaf met n punten waarbij iedere 2 punten verbonden zijn met 1 zijde.
- Een k-partiete graaf is een graaf waarvan de set met de punten kan worden verdeeld in k disjuncte deelgrafen waarbij in iedere deelgraaf er geen enkele zijde is die 2 punten uit die deelverzameling verbindt.

  In een bipartite (letterlijk: "2-delige") graaf is de verzameling van knopen V opgesplits in twee delen: V_1 en V_2. De enige toegelaten zijden gaan verbinden knopen van V_1 met knopen van V_2. Er zijn dus geen zijden met twee knopen inV_1, noch met twee knopen in V_2.
- De graad van een knoop k (notatie $d(k)$ of $deg(k)$) is het aantal keren dat k een eindpunt is van een zijde, er geldt uiteraard dat $\sum d(x) = 2|E|$
- een pad is een opeenvolging van verschillende punten die met elkaar verbonden zijn via zijden, indien het start- en eindpunt a en b zijn, is de afstand $d(a, b)$ gelijk aan het aatal zijden bij het kortste pad van a naar b.
- indien bij een pad het eind- en beginpunt hetzelfde is, noemen we het een cyclus
- een graaf is verbonden als voor ieder paar punten er een pad is, die de 2 punten verbindt
- een verbonden graaf zonder cycels heet een boom, een boom heeft exact $n - 1$ zijden en minimum 2 punten met afstand 1.
- Een Hamiltoncykel is een cykel die ieder punt exact 1 keer bevat
- een Eulerpad is een pad waarbij alle zijden tot het pad behoren
  Een Eulercycel is een cycel die alle zijden aandoet.
- een planaire graaf is een graaf waarbij de zijden met lijnen kunnen worden getekend die elkaar niet snijden, zo'n graaf met n punten heeft maximaal $3n - 6$ punten

stellingen van Euler

Een simpele, samenhangende graaf bevat een Euler-cykel dan en slechts dan als de graad van alle knopen even is.

Een verbonden, planaire graaf met v knopen, e zijden en f gebieden (gebeid= deel van het vlak omringd door zijden), houdt zich aan de regel $v + f = e + 2$, dat geldt dan ook voor de convexe veelvlakken, waarbij f voor het aantal vlakken staat.

stelling van Turan

Als een simpele graaf met $n = t(p-1) + r$ punten met $0 \leq r < p - 1$ meer dan

$$\frac{(p-2)n^2 - r(p-1-r)}{2(p-1)}$$

zijden heeft, bestaat er een K_p die een subgraaf is.

stelling van Hall Neem een bipartiete graaf met X,Y de subgrafen die inwendig geen zijden bevatten:

indien voor elke deelverzameling S van X, de elementen van S samen met minimum $|S|$ elementen van Y verbonden zijn, dan is er een matching die alle elementen van X matcht.

Hierbij is $|X| \geq |Y|$ en bedoelen we met een matching dat ieder punt van X met een uniek punt van Y verbonden is met een zijde (een punt in Y is maximaal 1 keer verbonden).

stelling van Kuratowskil

Een graaf is planair aesa het K_5 en $k_{3,3}$ niet bevat.

stelling van Ramsey

Deze stelling zegt dat een complete graaf met minimum $R_(n_1, \cdots, n_c)$ waarvan de zijden in c kleuren $1, 2 \cdots c$ gekleurd worden, dan bestaat er een complete subgraaf met n_i punten waarvan alle zijden in kleur i gekleurd zijn.

Gekende voorbeelden zijn $R(3,3) = 6, R(3,3,3) = 17$ en in het algemeen is de bovengrens ; $R(\underbrace{3, 3, \cdots, 3}_{k}) \leq \lfloor k!e \rfloor + 1$

1. Bewijs dat in een groep van 6 personen er 3 personen te vinden zijn die elkaar niet kennen of elkaar wel kennen.

   link

2. Bewijs dat als we een graaf beschouwen die een boom is, er een punt is die tot alle langste paden behoort.

   link

3. De volgende handeling is toegestaan op een eindige graaf: kies een willekeurige cykel van lengte 4 (als er zijn),
   en kies een willekeurig boog in die cykel, en verwijder die van de graaf.
   Voor een vast natuurlijk getal $n \geq 4$, vind het minimum aantal bogen van een graaf dat verwijderd kan worden door herhaaldelijk deze handeling uit te voeren op de complete graaf met n knopen.

   link

4. Zij n een even natuurlijk getal.
   Toon aan dat er een permutatie $x_1, x_2, \dots, x_n$ van $1, 2, \dots, n$ bestaat
   zodat voor iedere $1 \leq i \leq n$ het getal x_{i+1} is n van de getallen $2x_i, 2x_i - 1, 2x_i - n, 2x_i - n - 1$ (met $x_{n+1} = x_1$).

   link

5. Bekijk $n \geq 2$ punten op de omtrek van een cirkel met straal 1. Zij q het aantal lijnstukken met de eindpunten in die n punten, met lengte groter dan $\sqrt{2}$. Bewijs dat $3q \leq n^2$.

   link

6. De leden van een internationaal genootschap komen uit 6 verschillende landen. De ledenlijst bevat 1978 namen, genummerd van 1 tot en met 1978. Bewijs dat er ten minste 1 lid is wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee van zijn landgenoten of tweemaal zo groot als het nummer van 1 van zijn landgenoten.

   link

7. Voor een eindige graaf G, stel $f(G)$ gelijk aan het aantal driehoeken en $g(G)$ het aantal viervlakken gevormd door de bogen van de graaf G. Vind de kleinste constante c zodat

   $$g(G)^3 \leq c \cdot f(G)^4$$

   voor elke graaf G.

   link

8. Op een planeet hebben we 2^N landen met $N \geq 4$. Ieder land heeft een vlag met N stroken die naast elkaar liggen. Geen 2 landen hebben er eenzelfde vlag.
   Een verzameling van N vlaggen is divers als we ze kunnen leggen tot een $N * N$vierkant zodat alle N velden/stroken op de hoofddiagonaal dezelfde kleur hebben. Vind het kleinste aantal vlaggen dat we nodig hebben, zodat we er steeds N kunnen vinden die een diverse verzameling kunnen vormen. link

9. $P_1, \cdots P_s$ zijn rekenkundige rijen van gehele getallen. De volgende condities gelden: a) ieder geheel getal behoort tot minstens 1 rekenkundige rij b) iedere rij bevat minimum 1 getal dat geen enkele andere rij bevat Met n noteren we het kgv van de verschillen van de s rijen en schrijf $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ als priemfactorontbinding. Bewijs dat $s \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i(p_i - 1)$.

   link

4.8 genererende functies

1. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{2k-1} = F_{2n}$

   link

2. Zij p een oneven priemgetal. Bepaal het aantal deelverzamelingen A van de verzameling $\{1, 2, \cdots 2p\}$ waarvoor geldt: (1) A bevat precies p elementen; (2) de som van alle elementen in A is deelbaar door p.

   link

3. We noemen een rij $a_0, a_1, \cdots, a_n$ van rele getallen m-gebalanceerd voor een natuurlijke $m \geq 1$ als de sommen
   $a_0 + a_m + \cdots$
   $\sum_{i=0}^{i=[n/m]} a_{im+1}$
   $\cdots$
   $\sum_{i=1}^{i=[n/m]+1} a_{im-1}$
   allen gelijk zijn ([] staat hier voor de entierfunctie)
   Zij $a_0, a_1 \cdots a_{49}$ een gebalanceerde rij voor iedere $m \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
   Bewijs dat $a_0 = \cdots = a_{49} = 0$.

   link

4. Zij $m, n \geq 2$ natuurlijke getallen en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehele getallen, waarvan er geen enkele een veelvoud is van m^{n-1}. Toon aan dat er gehele getallen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bestaan, niet allemaal gelijk aan 0, met $|e_i| < m$ voor alle i, zodat $e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$ een veelvoud is van m^n.

   link

5. Zij n een positief geheel getal groter dan 1. Voorts zijn er n in een cirkel geplaatste lampen $L_0, \cdots, L_{n-1}$. Op elk moment is iedere lamp AAN of UIT. Een reeks stappen $S_0, S1 \cdots$ wordt uitgevoerd. Stap S_j heeft alleen invloed op de toestand van L_j (de toestand van alle andere lampen blijft onveranderd) en wel als volgt: (1) als L_{j-1} AAN is, dan verandert S_j de toestand van L_j van AAN naar UIT of van UIT naar AAN; (2) als L_{j-1} UIT is, dan verandert S_j de toestand van L_j niet. De lampen zijn mod(n) genummerd, dat wil zeggen $L_n = L_0$ etcetera. In het begin zijn alle lampen AAN. Bewijs dat (a) er een positief getal $M(n)$ bestaat zodanig, dat na $M(n)$ stappen alle lampen weer AAN zijn; (b) als $n = 2^k, k \in N$, alle lampen weer AAN zijn na $n^2 - 1$ stappen; (c) als$n = 2^k + 1, k \in N$ alle lampen weer AAN zijn na $n^2 - n - 1$ stappen.

   link

6. n, k zijn natuurlijke getallen zodat $k \geq n$ en $2|k - n$. We hebben $2n$ lampen geordend van 1 tot $2n$. In het begin zijn alle lampen uit. Bij iedere stap doen we een lamp branden of doven we een brandende lamp. (we wisselen de status van 1 lamp) Het aantal manieren bestaande uit k stappen om alle lampen van 1 tot n te doen branden en de andere gedoofd te laten, noemen we N. (de lampen van $n + 1$ tot $2n$ mogen aan zijn geweest, maar zijn bij het einde uit) Het aantal manieren die behoren tot N, maar waarbij de lampen $n + 1$ tot $2n$ allen gedurende de k stappen gedoofd bleven, noemen we M. Bepaal $\frac{N}{M}$.

   link

uitzonderlijke stellingen

Enkel bij een vraag 3 of 6 kan eens een heel uitzonderlijke stelling voorkomen die nodig is om de vraag op te lossen. Hier enkele voorbeelden (maar bij een IMO-training of dergelijke zelden nodig natuurlijk)

1.

2.

Diverse combinatoriekvragen

De meeste soorten van combinatoriekvragen konden opgelost worden met 1 van vorige methodes. Het blijft echter creatief denken en daarom is oefenen nog steeds belangrijker dan de uitzonderlijke stellingen.

1. We definieren $p(n)$ als het aantal manieren om n te schrijven als de som van positieve getallen $\in \mathbb{N}$. Bewijs dat $p(n) - p(n-1)$ gelijk is aan het aantal manieren om n te schrijven als een som van positieve getallen $\in \{2, 3, 4, 5 \cdots\}$.

   link

2. In een eindige rij, geldt er dat iedere opeenvolgende a elementen een strikt negatieve som heeft en iedere opeenvolgende b elementen een strikt positieve som. Hoeveel elementen kan de rij maximaal hebben?

   link

3. In een groep van 120 personen zijn er sommige koppels bevriend.
   Een zwak kwartet is een verzameling van vier personen waarvan er precies 1 koppel bevriend is.
   Wat is het maximum aantal zwakke kwartetten?

   link

4. Een buitenaards ras heeft drie geslachten: male, female en emale.
   Een getrouwd tripel bestaat uit drie personen, van elk geslacht 1, die allemaal van elkaar houden.
   Een wezen mag hoogstens tot n getrouwd tripel behoren. We gaan er verder van uit dat houden van een wederzijds gevoel is.
   Het ras zendt een expeditie uit om een andere planeet te koloniseren. Er gaan n males, n females en n emales mee. Elk lid van de expeditie houdt van minstens k personen van elk van de andere twee geslachten. De bedoeling is om zoveel mogelijk getrouwde tripels te vormen.
   (a) Toon aan dat als n even is en $k = \frac{n}{2}$, het zelfs niet altijd mogelijk is om 1 getrouwd tripel te vormen.
   (b) Toon aan dat als $k \geq \frac{3n}{4}$, het altijd mogelijk is om n disjuncte getrouwde tripels te vormen en zo alle expeditieleden te trouwen.

   link

5. n Jongens $a_1, a_2, \cdots a_n$ en n meisjes $m_1, m_2, \cdots, m_n$ zijn op een feestje. Jongens schudden geen handen met elkaar, net zoals de meisjes geen andere vrouwtjes een hand gaven. a_i gaf nooit een hand aan m_i $\forall i \in \{1, 2 \cdots, n\}$. We willen de $2n$ gasten verdelen in t groepen zodat: 1. In iedere groep is het aantal jongens gelijk aan 't aantal meisjes. 2. In iedere groep schudden geen 2 personen een hand aan elkaar.

   m is het aantal koppels (a_i, m_j) die elkaar een hand gaven. Bewijs dat het mogelijk is de groepn te verdelen met $t \leq max(2, \frac{2m}{n} + 1)$.

   link

5 varia : mooie vragen door elkaar

Tot slot nog enkele vragen van alle onderwerpen om zeker te zijn dat alles toegepast kan worden op een echte wedstrijd.
Veel succes op die olympiades om het land goed voorbereid te vertegenwoordigen.

1.
2.
3.
4.
5.
6.

Verder raden we aan de gewenste olympiade via het archief op te zoeken, voor de beste voorbereiding.