olympiadecombinatoriek

olympia ism QED en VWO

2011 (versie 1)

1 Inleiding en basis

In dit bestand wordt geprobeerd de combinatorische open vragen uit te leggen. Combinatoriek berust vooral op creativiteit en het geniaal toepassen van enkele simpele dingen:

- het duivenhokprincipe (zie uitgebreid bestand van Arne Smeets)
- invarianten (er wordt een functie opgesteld die bij iedere stap gelijk blijft, maar die bij het eind en het begin verschillend is, zodat er geen oplossing mogelijk is), dat kan bestaan uit een vergelijking modulo, teken, ...
- de algemene problem-solvingdingen zoals kleuringen en extremaalprincipe, hierbij bekomt men contradicties door een bepaald patroon te gebruiken of het kleinste/grootste element te bekijken
- telproblemen: k elementen in volgorde plaatsen met keuze uit n elementen kan op $\frac{n!}{(n-k)!}$ manieren,

  indien elementen meerdere keren mogen voorkomen, hebben we n^k manieren om rijen te vormen van k elementen

  indien de volgorde niet belangrijk is, hebben we $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ manieren om k elementen te selecteren uit n waarden

  het aantal permutaties van een set $\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$ waarbij a_i k_i keer voorkomt en er in totaal n elementen zijn, is gelijk aan $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!}$
- inductie: men bewijst het voor kleine waarden en toont aan dat het geldt voor $n+1$ wanneer de uitspraak al geldt voor 1 tot n waardoor het geldt voor alle elementen

Het Duivenhokprincipe

Arne Smeets

1 Duivenhok, zn., onz. (-ken), hok waarin men duiven houdt

Dit is alles wat de "Dikke Van Dale" ons weet te vertellen over het woord *duivenhok*. Een saai begrip, nee? Zeker niet interessant genoeg om een hele lesbrief te vullen... maar wanneer we het hebben over het *duivenhokprincipe*, dan worden de zaken al direct veel interessanter, en dan weet de Van Dale plots van toeten noch blazen. Deze lesbrief gaat dus over het *duivenhokprincipe*, ook wel het *ladenprincipe van Dirichlet* genoemd. In het Frans spreekt men over *le principe des tiroirs* en in het Engels heeft men het over *the pigeonhole principle*, dat we zullen afkorten als "PHP". Met behulp van een drietal eenvoudige stellingen (die we PHP1, PHP2 en PHP3 zullen noemen) kunnen we een aantal zeer leuke en uiteenlopende problemen oplossen: hoofdzakelijk opgaven uit de combinatoriek, maar soms ook algebraïsche, getaltheoretische en zelfs meetkundige problemen. Vaak zijn dit moeilijke vragen: het duivenhokprincipe mag dan wel zeer eenvoudig zijn, in veel gevallen is het verre van evident om het op de juiste manier toe te passen. Je bent gewaarschuwd... Succes!

2 Lang geleden waren er eens n duiven en k duivenhokken...

Veel theorie valt er hier niet te bespreken: ik presenteer hier drie eenvoudige stellingen, die door sommigen misschien zelfs als "vanzelfsprekend" en logisch zullen worden beschouwd. Men gebruikt dikwijls *duiven* en *duivenhokken* (of *laden* en *voorwerpen*) om deze stellingen te formuleren, maar in feite handelen deze stellingen over verzamelingen en functies. Na elke stelling vermeld ik dus ook de "formele"(wiskundig correcte) versie van de stelling. We zullen in dit hoofdstukje het aantal elementen van een verzameling S voorstellen door $|S|$. Met $[x]$ bedoel ik natuurlijk de *entier* van x, met andere woorden, het grootste geheel getal, kleiner dan of gelijk aan x.

Stelling. (*PHP1*) Zij $n \in \mathbb{N}_0$. Als men meer dan n duiven over n duivenhokken verdeelt, dan bestaat er duivenhok dat minstens twee duiven bevat.

Bewijs. Als elk duivenhok ten hoogste één duif zou bevatten, dan zou het totaal aantal duiven (in alle n duivenhokken samen) niet groter zijn dan n. Dit is een contradictie, dus er bestaat een duivenhok dat minstens twee duiven bevat. $\square$

We herformuleren deze stelling: als A en B eindige verzamelingen zodat $|A| > |B|$, en als $f : A \to B$ een afbeelding is, dan kan f niet injectief zijn. Zie je waarom dit precies dezelfde stelling is?

Stelling. (*PHP2*) Als men oneindig veel duiven over een eindig aantal duivenhokken verdeelt, dan bestaat er een duivenhok dat oneindig veel duiven bevat.

Bewijs. Als elk duivenhok een eindig aantal duiven zou bevatten, dan zou het aantal duiven in alle duivenhokken samen eindig zijn (omdat er slechts een eindig aantal duivenhokken is). Dit is een contradictie, dus een van de duivenhokken bevat oneindig veel duiven. $\square$

Als je "professioneel" wil klinken dan kan je de stelling ook als volgt formuleren: als A een oneindige verzameling is, als B een eindige verzameling is en als $f : A \to B$ een afbeelding is, dan bestaat er een oneindige verzameling $C \subset A$ zodat alle elementen van C hetzelfde beeld hebben onder f.

De meest algemene vorm van het duivenhokprincipe (en de meeste krachtige) is de volgende:

Stelling. (*PHP3*) Zijn $n, k \in \mathbb{N}_0$. Als men n duiven verdeelt over k duivenhokken, dan bestaat er een duivenhok dat minstens $\left[\frac{n-1}{k}\right] + 1$ duiven bevat.

(Of nog: als m en n natuurlijk getallen zijn, en men verdeelt meer dan mn duiven over n duivenhokken, dan bestaat er een duivenhok dat minstens $m + 1$ duiven bevat.)

Bewijs. Als elk duivenhok minder dan $\left[\frac{n-1}{k}\right] + 1$ duiven zou bevatten, dan zou het totaal aantal duiven in alle duivenhokken samen niet groter zijn dan $k\left[\frac{n-1}{k}\right]$. Nu is het duidelijk dat $[x] \leq x$ voor alle reële getallen x. Bijgevolg is $k \cdot \left[\frac{n-1}{k}\right] \leq n-1$. Het totaal aantal duiven zou dus niet groter zijn dan $n-1$, maar dat is onmogelijk aangezien er n duiven zijn. Bijgevolg bestaat er een duivenhok dat minstens $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ duiven bevat. $\square$

De herformulering van de vraag laat ik deze keer aan jou over.

3 Minstens twee Vlamingen hebben evenveel hoofdharen!

In dit hoofdstukje presenteer ik een aantal mooie (en soms moeilijke) toepassingen van het duivenhokprincipe. Het eerste voorbeeldje is echter verre van moeilijk...

Voorbeeld 0. Er bestaan twee Vlamingen die evenveel hoofdharen hebben.
Bewijs. Een mens heeft niet niet meer dan 200.000 hoofdharen (een bekend biologisch feit). Omdat er veel meer dan 200.000 niet-kale Vlamingen zijn, moeten minstens twee Vlamingen evenveel haren op hun hoofd hebben, volgens PHP1. $\square$

Voilà, tijd voor de serieuze voorbeelden...

Voorbeeld 1. (*VWO 1989*) Bewijs dat elke deelverzameling met 55 elementen van de verzameling $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ twee getallen bevat waarvan het (positieve) verschil gelijk is aan 9.
Oplossing. Zij A een deelverzameling van S met $|A| = 55$ en zijn $a_1 < a_2 < ... < a_{55}$ de elementen van A. Definieer $b_i = a_i + 9$ voor $i = 1, 2, 3, ..., 55$. Dan geldt $b_{55} = a_{55} + 9 \leq 109$. We hebben dus 110 natuurlijke getallen a_i, b_i, allen kleiner dan 110 en verschillend van 0. Volgens PHP1 moeten twee van deze getallen gelijk zijn, zodat $a_i = b_j$ voor zekere indices i en j, en $a_i - a_j = 9$. $\square$
Er bestaan verschillende alternatieve oplossingen voor deze vraag; je kan bijvoorbeeld restklassen modulo 9 beschouwen. Volgens PHP3 moeten minstens 7 elementen van A tot dezelfde restklasse behoren; noem deze getallen $b_1 < b_2 < ... < b_7$. We veronderstellen dat er geen indices i en j bestaan zodat $a_i - a_j = 9$. Omdat de zeven getallen b_i tot dezelfde restklasse behoren (mod 9) zal $b_j - b_i \geq 18$, waarbij $1 \leq i < j \leq 7$. Dan is $b_7 - b_1 = (b_7 - b_6) + (b_6 - b_5) + ... + (b_2 - b_1) \geq 6 \cdot 18 = 108$. Dat is natuurlijk onmogelijk voor twee getallen die tot S behoren; de veronderstelling was dus foutief. $\square$

Soms kan het duivenhokprincipe in een meetkundige context worden toegepast:

Voorbeeld 2. In een vierkant waarvan de zijde lengte 1 heeft liggen 51 punten. Bewijs dat er een cirkelschijf met straal $\frac{1}{7}$ bestaat die minstens 3 van de gegeven punten bedekt.
Oplossing. Verdeel het vierkant in 25 congruente vierkantjes met zijden van lengte $\frac{1}{5}$. Volgens PHP3 bestaan er dan 3 punten die in hetzelfde vierkant liggen. Noem dit vierkant V en noem O het middelpunt van dit vierkant. De omgeschreven cirkel van V heeft middelpunt O en straal $\frac{1}{5\sqrt{2}} < \frac{1}{7}$. De cirkel met middelpunt O en straal $\frac{1}{7}$ zal het vierkant V bijgevolg volledig bedekken, en bijgevolg zullen ook alle punten binnen V (dit zijn er minstens 3) bedekt worden door deze cirkel. $\square$

Het volgende voorbeeldje is een schitterende toepassing van het duivenhokprincipe:

Voorbeeld 3. Bewijs dat elke verzameling van 13 reële getallen twee getallen a en b bevat zodat

$$0 \leq \frac{a-b}{1+ab} \leq 2-\sqrt{3}.$$

Oplossing. Zij $S = \{s_1, s_2, ..., s_{13}\}$ de gegeven verzameling en stel $t_i = \text{bgtan}\, s_i$ voor $i = 1, 2, ..., 13$. Dan geldt voor $i = 1, 2, ..., 13$ dat $t_i \in [-\pi/2, \pi/2]$. We verdelen het interval $[-\pi/2, \pi/2]$ in twaalf deelintervallen van gelijke lengte, namelijk de intervallen $[k\pi/12, (k+1)\pi/12]$ voor $k = -6, -5, ..., 5$. Omdat er 13 getallen t_i gegeven zijn zullen twee getallen tot hetzelfde interval behoren (PHP1), met andere woorden, er bestaan indices p en q zodat $0 \leq t_p - t_q \leq \pi/12$. Omdat de tangensfunctie stijgend is op het interval $]-\pi/2, \pi/2[$ geldt er dat $0 \leq \tan(t_p - t_q) \leq \tan(\pi/12)$. Merk nu op dat $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ en dat

$$\tan(t_p - t_q) = \frac{\tan t_p - \tan t_q}{1 + \tan t_p \cdot \tan t_q} = \frac{s_p - s_q}{1 + s_p s_q}.$$

Stel $s_p = a$ en $s_q = b$: we zijn nu klaar. $\square$

Soms moet je een opgave veralgemenen om die te kunnen oplossen:

Voorbeeld 4. (*Servië-Montenegro 2002*) Toon aan dat er een natuurlijk getal $k \neq 0$ bestaat zodat de cijfers 3, 4, 5 en 6 niet voorkomen in de decimale voorstelling van het getal $k \cdot 2002!$.
Oplossing. We bewijzen een veel mooiere stelling: alle natuurlijke getallen n hebben een veelvoud van de vorm $11\dots100\dots0$. (In dit geval is natuurlijk $n = 2002!$) Zij $a_k = 11\dots11$ het getal dat uit k cijfers 1 bestaat. Natuurlijk bestaan er oneindig veel dergelijke getallen, maar er zijn slechts eindig veel restklassen modulo n. Volgens PHP2 bestaan er dus indices p en q zodat $a_p \equiv a_q \pmod{n}$. Bijgevolg is $n|a_p - a_q$, en $a_p - a_q$ is van de vorm $11\dots100\dots0$, dus we zijn klaar. □

De volgende drie voorbeelden zijn zeer moeilijke opgaven. Je zal zien dat de toepassing van het duivenhokprincipe vaak slechts een klein stukje is van de volledige oplossing van een opgave.

Voorbeeld 5. Gegeven is een rechthoekig rooster van punten met 13 rijen en 13 kolommen. Men kleurt 53 van de 169 gegeven punten rood. Bewijs dat er een rechthoek bestaat waarvan de zijden evenwijdig zijn aan de randen van het rooster en waarvan alle hoekpunten rode roosterpunten zijn.
Oplossing. Noem a_1, a_2, ..., a_{13} het aantal rode punten in de eerste, tweede, ..., dertiende rij respectievelijk. Natuurlijk is $a_1 + a_2 + ... + a_{13} = 53$. Na enig nadenken zien we dan dat er een dergelijke rechthoek bestaat als

$$\sum_{k=1}^{13} \binom{a_k}{2} > \binom{13}{2} = 78. \ (*)$$

Inderdaad, voor rij i zijn er $\binom{a_i}{2}$ mogelijke koppels van rode punten in die rij. Beschouw nu de 13 kolommen van het rooster. Er zijn $\binom{13}{2} = 78$ mogelijke combinaties van twee kolommen. Als nu $(*)$ geldt, dan zal een zekere combinatie van twee kolommen minstens twee maal bereikt worden door twee paren van punten (PHP1), waarbij de twee punten van elk paar in dezelfde rij liggen en waarbij de twee paren onderling in verschillende rijen gelegen zijn. (Dit klinkt moeilijk maar dat is het niet.) Het volstaat dus om te bewijzen dat $(*)$ geldt. Welnu,

$$\sum_{k=1}^{13} \binom{a_k}{2} = \sum_{k=1}^{13} \frac{a_k(a_k-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{13} a_k^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{13} a_k.$$

Nu is $a_1 + a_2 + ... + a_{13} = 53$ dus geldt volgens de ongelijkheid van Cauchy dat

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{13}^2\right)\left(1^2 + 1^2 + ... + 1^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + ... + a_{13}\right)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{13} a_k^2 \geq \frac{53^2}{13}.$$

Bijgevolg geldt inderdaad dat

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{13} a_k^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{13} a_k \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{53^2}{13} - 53\right) > 78$$

dus moet er een dergelijke rechthoek bestaan. □

Voorbeeld 6. (*IMO 1987 Vraag 3*) Zijn x_1, x_2, ..., x_n reële getallen zodat $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. Bewijs dat, $\forall k \in \mathbb{N}$ zodat $k \geq 2$, er gehele getallen a_1, a_2, ..., a_n bestaan, niet allen gelijk aan 0, zodat $|a_i| \leq k - 1$ voor alle i en zodat

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Oplossing. Zonder verlies van de algemeenheid mogen we veronderstellen dat $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$. Zij m de unieke index waarvoor geldt dat $x_1, x_2, ..., x_m \geq 0$ en $x_{m+1}, ..., x_n < 0$. (Als alle getallen x_i strikt negatief zijn, dan stellen we $m = 0$; als alle getallen x_i positief zijn dan stellen we $m = n$.) Zij $\mathcal{C}$ de verzameling van alle vectoren $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ zodat $c_i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Beschouw alle mogelijke waarden van de som $S = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ voor $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathcal{C}$. De kleinst en grootst mogelijke waarden van S worden respectievelijk bereikt voor

$$(c_1, c_2, ..., c_n) = (\underbrace{0, ..., 0}_{m}, \underbrace{k-1, ..., k-1}_{n-m});$$

$$(c_1, c_2, ..., c_n) = (\underbrace{k-1, ..., k-1}_{m}, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m}).$$

Noem deze extreme waarden A en B respectievelijk, dan geldt er dat

$$B - A = (k-1)(|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|).$$

Omdat $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$ geldt volgens de ongelijkheid van Cauchy dat

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(1 + 1 + ... + 1) \geq (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|)^2 \Rightarrow |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq \sqrt{n}.$$

Bijgevolg is $B - A \leq (k-1)\sqrt{n}$. Nu liggen alle waarden die S kan aannemen in het interval $[A, B]$. We verdelen dit interval in $N = k^n - 1$ deelintervallen van gelijke lengte, namelijk van lengte $(B - A)/N$. Omdat de verzameling $\mathcal{C}$ precies k^n vectoren bevat, bestaan er volgens PHP1 twee vectoren $(c'_1, c'_2, ..., c'_n)$ en $(c''_1, c''_2, ..., c''_n)$ waarvoor de corresponderende sommen S' en S'' in hetzelfde deelinterval liggen, waarbij

$$S' = c'_1x_1 + c'_2x_2 + ... + c'_nx_n, \quad S'' = c''_1x_1 + c''_2x_2 + ... = c''_nx_n.$$

Dan geldt dus $|S' - S''| \leq (B - A)/N$. Neem nu $a_1 = c'_i - c''_i$ voor $i = 1, 2, ..., n$. Op die manier verkrijgen we een vector $(a_1, a_2, ..., a_n)$, verschillend van de nulvector in $\mathbb{R}^n$, waarvoor geldt dat $|a_i| \leq k - 1$ voor $i = 1, 2, ..., n$ en

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n| = |S' - S''| \leq \frac{B - A}{N} \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

dus we hebben gehele getallen $a_1, a_2, ..., a_n$ gevonden die voldoen aan het te bewijzen. □

Voorbeeld 7. (*IMO 2001 Vraag 3*) Aan een wiskundecompetitie namen 21 jongens en 21 meisjes deel. Achteraf bleek dat geen enkele deelnemer meer dan 6 problemen oploste, en dat er voor elke jongen en voor elk meisje minstens één probleem bestaat dat door zowel die jongen als door dat meisje opgelost werd. Bewijs dat er een probleem bestaat dat opgelost werd door minstens 3 jongens en minstens 3 meisjes.

Oplossing. Om te beginnen voeren we een paar notaties in. Noem J de verzameling van de jongens, M de verzameling van de meisjes, P de verzameling van de problemen. Dan is $|M| = |J| = 21$. Noem $P(m)$ de verzameling van de problemen die opgelost werden door een meisje $m \in M$ en $P(j)$ de verzameling van de problemen die opgelost werden door $j \in J$. Tenslotte noemen we $J(p)$ en $M(p)$ respectievelijk de verzamelingen van de jongens en meisjes die het probleem $p \in P$ oplossen. Nu kunnen we aan de slag. We willen bewijzen dat er een probleem $p \in P$ bestaat waarvoor geldt dat $|J(p)| \geq 3$ en $|M(p)| \geq 3$. We veronderstellen dat dit niet het geval is. We zullen op twee verschillende manieren het aantal elementen tellen van de verzameling $T = \{(p, m, j) \mid p \in P(m) \cap P(j)\}$. Natuurlijk is $|T| \geq 21^2 = 441$, omdat er 21^2 koppels (j, m) bestaan van een jongen en een meisje en omdat er voor elk koppel (j, m) een probleem bestaat dat zowel door j als door m opgelost werd. Veronderstel dus dat er geen $p \in P$ bestaat zodat $|M(p)| \geq 3$ en $|J(p)| \geq 3$. We merken op dat

$$\sum_{m \in M} |P(m)| = \sum_{p \in P} |M(p)| \leq 6\,|M| = 126, \quad \sum_{j \in J} |P(j)| = \sum_{p \in P} |J(p)| \leq 6\,|J| = 126$$

omdat geen enkele deelnemer meer dan 6 problemen oplost. (De gelijkheden hierboven kan men eenvoudig aantonen en zijn eigenlijk niet meer dan logisch.) We definiëren nu

$$P_+ = \{p \in P \mid |M(p)| \geq 3\}; \; P_- = \{p \in P \mid |M(p)| \leq 2\}.$$

We zullen bewijzen dat
$$\sum_{p\in P_-} |M(p)| \geq |M|\,, \ \sum_{p\in P_+} |J(p)| \geq |J|\,. \ (*)$$
Zij $m \in M$ een willekeurig meisje. Volgens het duivenhokprincipe lost m een probleem p op dat door minstens $\left[\frac{21-1}{6}\right] + 1 = 4$ jongens opgelost wordt. Wegens onze veronderstelling volgt uit $|J(p)| \geq 4$ dat $p \in P_-$, dus elk meisje lost minstens één probleem uit P_- op. Op analoge wijze toont men aan dat elke jongen minstens één probleem uit P_+ oplost. Daarmee is $(*)$ bewezen. Dan geldt ook
$$\sum_{p\in P_+} |M(p)| = \sum_{p\in P} |M(p)| - \sum_{p\in P_-} |M(p)| \leq 5\,|M|\,, \ \sum_{p\in P_-} |J(p)| \leq 5\,|J|\,.$$
Nu is
$$|T| = \sum_{p\in P} |M(p)| \cdot |J(p)| = \sum_{p\in P_+} |M(p)| \cdot |J(p)| + \sum_{p\in P_-} |M(p)| \cdot |J(p)|$$
en bijgevolg geldt volgens onze veronderstelling dat
$$|T| \leq 2\sum_{p\in P_+} |M(p)| + 2\sum_{p\in P_-} |J(p)| \leq 10\,|M| + 10\,|J| = 420.$$
We bewezen echter dat $|T| \geq 441$. Onze veronderstelling was dus foutief; we zijn dus klaar. □

4 Al doende leert men!

De eerste opgaven zijn zeer eenvoudig, de laatste opgaven zijn aan de moeilijke kant (maar natuurlijk niet zo moeilijk als Voorbeeld 7.) De laatste opgave is vraag 6 van IMO 2005: normaalgezien is zo'n vraag onoplosbaar voor een Belg, maar in 2005 was vraag 6 iets gemakkelijker dan gewoonlijk, en maar liefst 2 van de 3 Vlaamse IMO-deelnemers losten deze vraag op! Succes!

1. Bewijs dat er een getal N van de vorm 20042004...2004 bestaat waarvoor geldt:
   - N is deelbaar door 2003, en
   - N heeft niet meer dan 10.000 cijfers in decimale voorstelling.
2. (*IMO 1972 Vraag 1*) Bewijs: elke verzameling van 10 natuurlijke getallen kleiner dan 100, heeft twee disjuncte deelverzamelingen waarvan de sommen van de elementen gelijk zijn.
3. Bewijs: elk veelvlak heeft twee zijvlakken die begrensd worden door een gelijk aantal zijden.
4. (*British Mathematical Olympiad 2000*) Bestaat er een verzameling van elf gehele getallen zodat geen zes van deze gehele getallen een zesvoud als som hebben?
5. Een basketbalteam speelde 45 wedstrijden in een maand met 30 dagen. Elke dag speelde het team minstens één wedstrijd. Bewijs dat er een periode van een bepaald aantal dagen bestaat zodat het team gedurende die periode precies 14 wedstrijden speelde.
6. (*Rusland 1961*) Men plaatst 120 vierkantjes met zijden van lengte 1 binnen een rechthoek met afmetingen 20×25, en dat op willekeurige wijze. Bewijs dat men een cirkel met diameter 1 binnen deze rechthoek kan plaatsen zodat deze cirkel geen enkel vierkantje snijdt.
7. (*Bulgarian Mathematical Olympiad 2003*) Bart en Ria spelen het volgende spel. Bart schrijft n verschillende natuurlijke getallen op een papier, met n een natuurlijk getal. Ria mag enkele van deze getallen wegstrepen (ze mag er ook geen enkel wegstrepen, maar ze mag ze zeker niet allemaal wegstrepen). Daarna mag Ria voor elk van de overblijvende getallen een + of een − zetten en de som bepalen van de getallen die ze op deze manier bekomt. Als deze som deelbaar is door 2003 dan wint Ria. In het andere geval wint Bart. Voor welke waarden van n heeft Bart een winnende strategie, en voor welke waarden van n heeft Ria een winnende strategie?

8. (*IMO 1988 Longlist*) Zijn $a_1, a_2, \ldots, a_{11} \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat er $b_1, b_2, \ldots, b_{11} \in \{-1, 0, 1\}$ bestaan (niet allen gelijk aan 0) zodat $\sum_{k=1}^{11} a_k b_k$ deelbaar is door 2005.

9. (*China 1990*) Bepaal het kleinste natuurlijk getal n zodat er voor elke verzameling $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ van n verschillende reëele getallen, gekozen uit het interval $[1, 1000]$, indices i en j bestaan waarvoor geldt dat $0 < a_i - a_j < 1 + 3\sqrt[3]{a_i a_j}$.

10. Binnen een cirkel met straal 16 liggen 650 gegeven punten. Definieer een *ring* als het vlakdeel dat begrepen is tussen twee concentrische cirkels met stralen 2 en 3 respectievelijk. Bewijs dat men een ring kan plaatsen zodat minstens 10 van de 650 punten bedekt worden door deze ring.

11. (*IMO 2005 Vraag 6*) Bij een wiskundewedstrijd kregen de deelnemers 6 opgaven voorgelegd. Ieder tweetal van deze opgaven werd door meer dan $\frac{2}{5}$ van het aantal deelnemers opgelost. Niemand loste alle 6 de opgaven op. Laat zien dat minstens 2 deelnemers ieder precies 5 opgaven hebben opgelost.

◦ ◦ ◦

2 principe van inclusie-exclusie

Het principe van inclusie exclusie (PIE) zegt:

Zij $A1, A2, ..., An$ eindige verzamelingen. Dan geldt

$|A1 \cup A2 \cup ... \cup An| =$

$|A1| + |A2| + ... + |An| - |A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - ... - |A_{n-1} \cap An|$

$+|A1 \cap A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| ... + (-1)^{n+1}|A1 \cap A2 \cap ... \cap An|$

Een andere vorm hiervan is de volgende :

Het principe van inclusie exclusie (PIE) - alternatieve vorm Zij $A1, A2, ..., An$ deelverzamelingen van een eindig üniversum"X. Dan geldt

(Aantal elementen dat in geen van de Ai's zit) (de 1^e - moet een schuine streep zijn om te zeggen dat de andere verzameling er niet in is gerekend)

$= |X - (A1 \cup A2 \cup ... \cup An)|$

$= |X|$

$-(|A1| + |A2| + ... + |An|$

$-|A1 \cap A2| - |A1 \cap A3| - ... - |A_{n-1} \cap An|$

$+|A1 \cap A2 \cap A3| + |A1 \cap A2 \cap A4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

...

$+(-1)^{n+1}|A1 \cap A2 \cap ... \cap An|)$

Er is niets beter om de creativiteit op te pakken dan enkele voorbeelden te zien, te proberen en de verbetering te zien met extra tips:

`http://olympia.problem-solving.be/node/1881`

t.e.m. `http://olympia.problem-solving.be/node/1899`

Round Robin - lemma: zij n een natuurlijk getal , dan kunnen we $x_1, \cdots x_{2n}$ $2n - 1$ keer opsplitsen in n verschillende paren, zodat ieder koppel voorkomt (dus geen enkel paar dubbel voor kwam)

3 genererende functies en veeltermen

1. wortels en ontbinding:

   Een niet-constante veelterm van graad n heeft exact n complexe nulpunten (niet noodzakelijk verschillend).

   Indien $P(\alpha_i) = 0$ voor i als $n+1$ waardenis, dus allen een wortel een wortel zijn van een veelterm met graad P, dan is die veelterm de nulveelterm.

2. complexe wortels:

   $\forall n \in \mathbb{N}$ is $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ een eenheidswortel, omdat $\omega_n^n = 1$ en $0 = 1+\omega_n+\cdots+\omega_n^{n-1} = \frac{\omega_n^n-1}{\omega_n-1}$

3. rational root theorem:

   Zij $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ een veelterm met gehele cofficinten en als geldt dat de breuk $\frac{p}{q}$ een wortel van f is met $ggd(p,q) = 1$, dan geldt dat $p|a_0$ en $q|a_n$.

4. delingsalgoritme:

   Zij $f(X)$ een veelterm met domein R met $R = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$of $\mathbb{C}$ dan zijn er veeltermen $p(X), q(X), r(X) \in R[X]$ zodat $f(X) = p(X)q(X) + r(X)$ met de graad van r kleiner dan die van f, hierbij zijn q, r uniek in functie van p.

5. Vieta :

   $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ heeft de n nulpunten z_1 tot z_n, dan geldt dat
   $\frac{(-1)^i a_{n-i}}{a_n} = \sum_{sym} z_{j1}z_{j2}\cdots z_{ji}$

6. veeltermvergelijkingen:

   Voor alle veeltermen met gehele cofficinten geldt dat $a-b|P(a)-P(b)$ als a, b verschillende gehele getallen zijn.

   Ook de graad vergelijken bij veeltermvergelijkingen en de nulpunten zijn vaak handig

7. irreducibiliteit:

   Een veelterm $f(x) \in R[x]$ is reducibel als er niet-constante veeltermen $g, h \in R[X]$ bestaan zodat $f(x) = g(x)h(x)$, in het andere geval is f irreducibel.

   lemma van Gauss: f is irredubel over $\mathbb{Z}$ aesa ze irreducibel is over $\mathbb{Q}$.

   criterium van Eisenstein:

   Zij $f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} P_i(x)y^i$ en veronderstel dat $Q(x)|P_i(x)$ voor $i \in \{0,1,2,3,4\cdots, n-1\}$,$Q(x) \not| P_n(x)$ en $Q(x)^2 \not| P_0(x)$, hierbij zijn P_i, Q veeltermen met gehele coefficienten die constant mogen zijn. Dan is f irreducibel.

Een genererende functie is een veelterm genoteerd als $g_a(z) = \sum_{a \in A} z^a$ waarbij A een deelverzameling is van $\mathbb{Z}$.

$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ noemen we de genererende functie van $(a_n)_n$

De technieken die gebruikt worden:

- Een gelijkheid van rijen bewijzen, kan dan door te bewijzen door te tonen dat de genererende functies gelijk zijn.
- Het aantal manieren waarop iets kan, wordt dan makkelijker bepaald als de som en product van verschillende functies.
- De som $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kunnen we in de genererende functie genereren als $\frac{f(X)}{1-X}$
- snake-oilmethod: de som van een bepaalde som berekenen we door de sommen in een rij te steken en de genererende functie van die rij te bepalen, hiervoor proberen we een juiste monische macht te plaatsen, waarna we gekende formules kunnen toepassen

We geven hier de belangrijke genererende functies/Taylorreeksen:

1. $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{n} x^n$
2. $(1+x)^a = \sum_{k \geq 0} \binom{a}{k} x^k$
3. $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$
4. $ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$
5. $sinx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
6. $cosx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Leuke voorbeelden van problem-solvingvragen om dit toe te passen vinden we op

`http://olympia.problem-solving.be/node/191` ,`http://olympia.problem-solving.be/node/303`,`http://olympia.problem-solving.be/node/1543`

en`http://olympia.problem-solving.be/node/1900` tot `http://olympia.problem-solving.be/node/1914`

Een tak apart is grafentheorie:

4 grafentheorie

Een graaf bestaat uit een verzameling V van knopen of vertices, en uit een eindige verzameling E van zijden of edges. Alle zijden zijn paren van knopen. Twee knopen X,Y zijn verbonden als er zijde X,Y is.

Hierbij geven we wat uitleg over de terminologie:

- Een propere graaf is een een graaf waarbij iedere zijde verbonden is met een andere zijde en geen enkel punt met zichzelf verbonden is.
- Een gerichte graaf is een graaf waarbij de zijden gericht zijn.
- Een complete graaf K_n is een propere graaf met n punten waarbij iedere 2 punten verbonden zijn met 1 zijde.
- Een k-partiete graaf is een graaf waarvan de set met de punten kan worden verdeeld in k disjuncte deelgrafen waarbij in iedere deelgraaf er geen enkele zijde is die 2 punten uit die deelverzameling verbindt.

  In een bipartite (letterlijk: "2-delige") graaf is de verzameling van knopen V opgesplits in twee delen: V1 en V2. De enige toegelaten zijden gaan verbinden knopen van V1 met knopen van V2. Er zijn dus geen zijden met twee knopen in V1, noch met twee knopen in V2.
- De graad van een knoop k (notatie $d(k)$ of $deg(k)$) is het aantal keren dat k een eindpunt is van een zijde, er geldt uiteraard dat $\sum d(x) = 2|E|$
- een pad is een opeenvolging van verschillende punten die met elkaar verbonden zijn via zijden, indien het start- en eindpunt a en b zijn, is de afstand $d(a, b)$ gelijk aan het aatal zijden bij het kortste pad van a naar b.
- indien bij een pad het eind- en beginpunt hetzelfde is, noemen we het een cyclus
- een graaf is verbonden als voor ieder paar punten er een pad is, die de 2 punten verbindt
- een verbonden graaf zonder cycels heet een boom, een boom heeft exact $n-1$ zijden en minimum 2 punten met afstand 1.
- een Eulerpad is een pad waarbij alle zijden tot het pad behoren
- een planaire graaf is een graaf waarbij de zijden met lijnen kunnen worden getekend die elkaar niet snijden, zo'n graaf met n punten heeft maximaal $3n-6$ punten

4.1 stellingen van Euler

Een simpele, samenhangende graaf bevat een Euler-cykel dan en slechts dan als de graad van alle knopen even is.

Een verbonden, planaire graaf met v knopen, e zijden en f gebieden (gebeid= deel van het vlak omringd door zijden), houdt zich aan de regel $v + f = e + 2$, dat geldt dan ook voor de convexe veelvlakken, waarbij f voor het aantal vlakken staat.

4.2 stelling van Turan

Als een simpele graaf met $n = t(p-1)+r$ punten met $0 \leq r < p-1$ meer dan $\frac{(p-2)n^2-r(p-1-r)}{2(p-1)}$ zijden heeft, bestaat er een K_p die een subgraaf is.

4.3 stelling van Hall

Neem een bipartiete graaf met X,Y de subgrafen die inwendig geen zijden bevatten:

indien voor elke deelverzameling S van X, de elementen van S samen met minimum $|S|$ elementen van Y verbonden zijn, dan is er een matching die alle elementen van X matcht.

Hierbij is $|X| \geq |Y|$ en bedoelen we met een matching dat ieder punt van X met een uniek punt van Y verbonden is met een zijde (een punt in Y is maximaal 1 keer verbonden).

Nog een gebonden variatie aan problemen zijn te zien op

`http://olympia.problem-solving.be/node/1915` tot `http://olympia.problem-solving.be/node/1921`