# VWO finales

versie 1

24 april 2012

De finale van de VWO en de meeste internationale olympiades bestaan uit het bewijzen van vragen. Dit is iets wat men niet meer leert op school en waarbij de start vaak moeilijk gaat. Hierbij zullen we een korte beschrijving en enkele tips proberen te geven in het algemeen.

Bewijzen, is door logische/ ware dingen op te sommen aan tonen dat de vraag steeds geldt of de gevonden oplossing juist is en de enige.

Een goed resultaat behalen bij zo'n finale, betekent dat je goed kan problem-solven, uiteraard. Maar ook goede problem-solvers kunnen eens een slecht resultaat hebben bij de wedstrijd die tot slot een momentopname is. Het komen op de idee-en, geen domme dingen doen en het voorbereid zijn op de soort ligt niet op voorhand vast. Problem-solving is dus niet enkel theorie, maar vooral op een goed idee kunnen komen tijdens dat moment en hierop voorbereid zijn.

Het is belangrijk dat je bij het begin zorgt dat je iedere vraag begrijpt en juist hebt gelezen. Eventueel kun je bij sommige competities vragen stellen bij de start voor de onduidelijkheden weg te werken. Een manier om het goed te doen wanneer je een perfect score wilt hebben, is:

* een vaste tijd (15/30 min./ 1u) per probleem te spenderen

* indien je na die tijd nog geen oplossing of nog ideen hebt/ ga je naar een volgend probleem

* je vervolledigt de problemen die je lagen

* je keert terug naar de moeilijkere problemen en zal evt. je op een andere manier/ nieuw perspectief naar het probleem doen kijken wanneer men de vraag opnieuw probeert op te lossen

LET OP: Indien men niet denkt om alles perfect te willen oplossen en mss in tijdsgebrek zou raken, werkt men de goede ideen uit om het bewijs van 1 vraag volledig uit te schrijven. Dit is vooral om te vermijden dat je enkele vragen snel vindt en op het einde niet meer verder raakt met de moeilijkere vragen.

Er zijn 4 soorten vragen: Algebra, meetkunde, getaltheorie en Combinatoriek.

Het leren voor iedere soort kan verschillend zijn: * combinatoriek vereist dat je verscheidene ideen kan verzinnen en simpele dingen zoals het duivenhokprincipe goed toepast, net omdat je zo'n wijde waaier aan ideen moet krijgen en soms eens iets speciaal, wordt dit nogal eens als het moeilijkste onderwerp aanzien. * bij meetkunde is er vaak wat meer basis nodig die vaak terug komt, de theorie berust hier vaker op de zelfde eigenschappen, op wereldvlak is dit vaak als simpelst gezien * algebra en analyse komt in moeilijkere vorm pas bij de gevorderde competities voor en start met logisch nadenken * getaltheorie heeft wat basiskennis nodig, maar vele vragen hebben ook een oplossing die geen geadvanceerde theorie nodig heeft.

Weten welke technieken wanneer gebruiken, kan tijd besparen.

Hier zijn kort enkele dingen waaraan men kan denken:

JWO: gelijkvormigheid, congruentie, Pythagoras, $X^2 \geq 0$ , functies opstellen, modulorekenen, angle-chasing, constructies VWO: koordenvierhoeken, ongelijkheden opstellen, goniometrische formules, inductie, logische gevolgen of lemma's en nog veel meer BxMO, IMO: alles dat op de stages wordt meegedeeld

Het oefenen op bewijzen, heeft natuurlijk de echte ervaring waarbij men ziet: Hoe kreeg ik het idee? Wat is de essentie/ oplossingswijze van het probleem?

Die ideen kunnen gelijkaardige vragen oplossen en soms een voordeel geven.

Om een goed bewijs te krijgen, moet alles duidelijk bewezen zijn. Voor een elegant bewijs, mag de oplossing ook niet te langdradig zijn, wat het bewijzen soms eens onduidelijk maakt. Volgende vuistregels helpen hierbij: Bij eenvoudige vragen, moeten eenvoudige en logische dingen ook aangetoond worden. Bij de moeilijke vragen, is het niet nodig om de triviale dingen nog eens te bewijzen. Dit zorgt ervoor dat iedere vraag een oplossing heeft die even lang zou moeten zijn.

We gaan starten met de specifieke "geboden"waarop men moet letten:

# 1 gevalonderscheid moet je goed opschrijven

Gevalonderscheid is iets dat vaak gebeurt en een oplossing lang en saai kan maken. Het moet duidelijk worden opgeschreven zodat het bewijs duidelijk toont dat de vraag altijd geldt. Het is belangrijk dat men geen gevallen vergeet.

Gevallen kunnen worden onderscheiden bij zowel functievergelijkingen als getaltheorievragen om specifieker te werken. Bij meetkunde kunnen snijpunten in verschillende volgordes liggen, zodat het bewijs uniform moet zijn door gevalonderscheid of op een andere manier: georinteerde hoeken, algemeen geldende eigenschappen... Bij ongelijkheden en delingen of ontbindingen moet men er zeker van zijn dat men niet deelt door 0 en later conclusies trekt die foute antwoorden geven of oplossingen vergeten.

**Voorbeeld 1.1.** *(JWO 2011/3) Een natuurlijk getal is prima als ieder deel van het getal zelf een priemgetal is (opeenvolgende cijfers ervan), bepaal alle primagetallen?*

***Oplossing.*** Het getal zelf moet een priemgetal zijn. Als er een 2 of 5 in voorkomt, dan zit die vooraan en nergens anders. Er kunnen verder alleen nog 3's en 7's in zitten.

Dus: begint het met een 2: Mogelijkheden zijn 2 en 23. Beginnen met 27 kan niet want 27 is niet priem. 233 kan ook niet want 33 is niet priem. 237 kan ook niet, deelbaar door 3.

begint het met een 3: Mogelijkheden zijn 37 en 373. Er kan geen 33 of 77 in voorkomen, en 3737 is dan weer deelbaar door 101.

Begint het met een 5: Mogelijkheid is alleen 53. 57 is niet priem, en 537 is duidelijk deelbaar door 3.

Begint het met een 7: Mogelijkheid is 73. want er mag geen 33 in voorkomen en voor 737 zie je dat het deelbaar is door 11 want de alternerende som is 7-3+7=11.

Dus het zijn: 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373 □

**Voorbeeld 1.2.** *(India 2011/6) Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan $f(x+y)f(x-y) = (f(x)+f(y))^2 - 4x^2 f(y)$*

*Stel $x$ en $y$ gelijk aan 0, dan is $(f(0))^2 = 4(f(0))^2$ en dus $f(0) = 0$. Stel $x = y$, dan is $0 = 4(f(x))^2 - 4x^2 f(x)$ waaruit $f(x) = 0$ of $f(x) = x^2$.*

*** Deze soort van "standaardfouten"zijn er omdat we meerdere gevallen hebben voor iedere $x$ en dus niet zeker zijn dat $f(x) = 0, f(x) = x^2$ de enige oplossingen zijn. Een combinatie van de 2 formules is nog niet uitgesloten.*

# 2 stellingen kunnen handig zijn, maar zorg dat je ze ook goed toepast.

Te veel theorie leren, zonder de basis te snappen is niet goed.

**Voorbeeld 2.1.** *(VWO 2011/4)*

*In een driehoek $ABC$ en punten $D, E$ op $[BC], [AB]$ resp. is $F$ het snijpunt van $CE$ met $AD$. Er geldt dat $|CD| = a, |BD| = b, |DF| = c, |AF| = d$ en bepaal hiermee in functie van die 4 letters de verhouding $\frac{|BE|}{|AE|}$.*

*Enkelen die deze stellingen leerden, zonder te begrijpen, verkrijgen $\frac{b}{-a} * \frac{c}{d} * \frac{|AE|}{|EB|} = -1$. Dit is te snel door de bocht, stelling leren is dus "gevaarlijk".*

***Oplossing.*** We gebruiken de stelling van Menelaos in driehoek $\triangle BDA$: De stelling zegt dan dat $\frac{\vec{BC}}{\vec{CD}} * \frac{\vec{DF}}{\vec{FA}} * \frac{\vec{AE}}{\vec{EB}} = -1$ moet gelden. Wanneer we dit juist invullen, zien we dat $\frac{b+a}{a} * \frac{c}{d} * \frac{|AE|}{|EB|} = 1$ en dus $\frac{|BE|}{|EA|} = \frac{c(a+b)}{ad}$.

Merk op dat dit ook eenvoudig kan worden opgelost zonder iets te kennen, buiten het idee met oppervlakten te werken:

We zien dat $\frac{|BE|}{|EA|} = \frac{[BCF]}{[AFC]} = \frac{[BFC]}{[DFC]} \frac{[DCF]}{[AFC]} = \frac{b+a}{a} \frac{c}{d}$. □

# 3 zoek naar de juiste objecten bij meetkunde

Soms kunnen vragen triviaal zijn na het vinden van de juiste objecten. Het construeren en vinden van de objecten is vaak het moeilijkste.

**Voorbeeld 3.1.** *(BxMO 2012/3)*

*$M$ is het middelpunt van $[BC]$ in driehoek $\triangle ABC$ en $P$ een variabel inwendig punt zodat $\angle CPM = \angle PAB$. De rechte $MP$ snijdt de omgeschreven cirkel $\tau$ van $\triangle ABP$ in $P$ en $Q$. We spiegelen $P$ tov de raaklijn in $B$ aan $\tau$ om $R$ te bekomen. Bewijs dat $|QR|$ constant is voor iedere mogelijke $P$ in de driehoek.*

*Voor verschillende plaatsen van $P$ rekenen, is hier erg moeilijk. Het vergt heel wat zoekwerk om $|QR| = |BC|$ te raden, wat na het bewijzen van congruentie tussen $\triangle QBR, \triangle CPB$ altijd geldt.*

*De driehoeken en die waarde vinden, maakte deze vraag erg slecht beantwoord, wat het moeilijke van constructies aantoont.*

# 4 Wees creatief!

Vooral bij combinatoriek is het vinden van een creatief iets soms verschrikkelijk moeilijk voor de meeste deelnemers, zoals deze vraag duidelijk toont:

**Voorbeeld 4.1.** *(JWO, VWO 2010/4)*

*Bij de boekhouding van Pita Goras, ziet de baas dat de som van iedere 5 opeenvolgende getallen positief is. De boekhouder ziet echter dat de som van elke opeenvolgende 7 termen negatief is. Hoeveel getallen kunnen er maximaal in de boekhouding voorkomen?*

***Oplossing.*** We kijken eerst of 11 getallen een mogelijkheid is.

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$ $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$ $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9$
$x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}$ $x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}$

Deze 35 getallen bestaan nu verticaal uit 7 positieve sommen en norizontaal uit 5 negatieve sommen, een duidelijke onmogelijkheid.

10 getallen kan wel met vb. de rij:

$5, -7, 5, -7, 5, 5, -7, 5, -7, 5$

□