Ongelijkheden: isolated fudging

Christophe Debry

Conventie. Als er in een opgave sprake is van de reële getallen $x_1, \ldots, x_n$ en f is een functie van n variabelen, dan bedoelen we met $\sum f(x_1, \ldots, x_n)$ de *cyclische* som. Voor $n = 3$ betekent dit

$$\sum f(x,y,z) = f(x,y,z) + f(y,z,x) + f(z,x,y).$$

Ongelijkheden komen vaak neer op een ingenieuze toepassing van AM–GM, Cauchy–Schwarz of Jensen (of bashing met Muirhead), en daarom zijn dit meestal de enige technieken die behandeld worden in een eerste training over ongelijkheden. En terecht: als je deze ongelijkheden beheerst, zal je al heel ver geraken. Maar in deze korte nota wil ik een andere methode tentoonstellen, namelijk *isolated fudging* en in het bijzonder het omvormen van rationale functies naar veeltermen. Hoewel je deze techniek niet heel vaak zal kunnen gebruiken, zal je – in de gevallen dat het *wel* kan – blij zijn deze heel elementaire en elegante methode te kennen. Een inleidende en motiverende illustratie:

We tonen voor alle positieve a, b en c aan dat

$$\frac{a+4(b+c)}{a^2+2(b+c)^2} + \frac{b+4(c+a)}{b^2+2(c+a)^2} + \frac{c+4(a+b)}{c^2+2(a+b)^2} \leq \frac{9}{a+b+c}.$$

Voor een willekeurig positief reëel getal x volgt uit $x(x-1)^2 \geq 0$ dat

$$\frac{4-x}{x^2-4x+6} \leq \frac{x+2}{3}.$$

Passen we dit nu toe voor $x = 3a/(a+b+c)$, dan vinden we dat

$$(a+b+c)\frac{a+4(b+c)}{3(a^2+2(b+c)^2)} \leq \frac{5a+2b+2c}{3(a+b+c)}.$$

Er volgt dat

$$\begin{aligned}\sum \frac{a+4(b+c)}{a^2+2(b+c)^2} &\leq \frac{5a+2b+2c}{(a+b+c)^2} + \frac{2a+5b+2c}{(a+b+c)^2} + \frac{2a+2b+5c}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{9(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{9}{a+b+c}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Je denkt nu waarschijnlijk (/hopelijk) "Waw, hoe is hij daar in godsnaam op gekomen? Daar zou ik nooit zelf aan denken!", maar, ten eerste, ik heb dit niet zelf uitgevonden, en ten tweede: jij kan dit na het lezen van deze "lesbrief" ongetwijfeld ook.

1 Isolated fudging

Stel dat je voor alle $a, b, c \geq 0$ wil bewijzen dat

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Normaliter zou je Cauchy–Schwarz, misschien zelfs in Engel vorm, als volgt toepassen:

$$\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum b} = \sum a.$$

Je schat dus alle termen *tegelijk* en van elkaar *afhankelijk* af. De filosofie van isolated fudging is dat het soms mogelijk of wenselijk is de termen *apart* af te schatten, en de reden waarom dit interessant zou kunnen zijn, is het feit dat elke term meestal (na dehomogenisatie) een functie van één veranderlijke is en dus beter beheersbaar is (via afgeleiden of nulpuntsfactoren). Laten we ons voorbeeld geïsoleerd fudgen: we nemen de term a^2/b apart en schatten hem af door op te merken dat $a^2 \geq b(2a - b)$ omdat $(a - b)^2 \geq 0$. Bijgevolg is

$$\sum \frac{a^2}{b} \geq \sum (2a - b) = (2a - b) + (2b - c) + (2c - a) = a + b + c.$$

We hebben inderdaad elke term apart afgeschat, en de som van al die afschattingen is wonderbaarlijk gelijk aan $a + b + c$. Er borrelen nu natuurlijk een aantal vragen op: hoe zie ik aan mijn ongelijkheid of deze techniek zou kunnen werken, hoe bereid ik hem voor om hem af te kunnen maken met een eenvoudige $(a - b)^2 \geq 0$ en hoe maak ik hem af met die $(a - b)^2 \geq 0$, i.e., hoe weet ik dat a^2/b precies door $2a - b$ moet worden afgeschat? De volgende secties bieden hier een antwoord op, maar we sluiten dit deel af met een korte opmerking bij het bovenstaande voorbeeld: op de Balkan olympiade van 2005 werd gevraagd voor alle $a, b, c > 0$ te bewijzen dat

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a - b)^2}{a + b + c}.$$

Dit is niet zo'n eenvoudige ongelijkheid, zelfs met isolated fudging, maar onze methode geeft alleszins een aanzet. De ongelijkheid $a^2 \geq b(2a - b)$ inspireert ons immers om het verschil van beide leden (op de laatste term na) als volgt te herschrijven:

$$\sum \frac{a^2}{b} - \sum a = \sum \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b \right) = \sum \frac{(a - b)^2}{b}.$$

Het volstaat dus nog te bewijzen dat

$$(b + c + a) \left(\frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} \right) \geq 4(a - b)^2.$$

Cauchy–Schwarz vertelt ons dat het linkerlid $\geq (|a - b| + |b - c| + |c - a|)^2$ is, waarbij $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2\,(\max(a, b, c) - \min(a, b, c))$ (bijvoorbeeld, als $b \geq c \geq a$, dan staat er $(b - a) + (b - c) + (c - a) = 2b - 2a$). Bijgevolg is $(|a - b| + |b - c| + |c - a|)^2 \geq 4\,(\max(a, b, c) - \min(a, b, c))^2 \geq 4(a - b)^2$, zoals we moesten bewijzen.

2 Voorbereiding

Eer je begint, wil je eigenlijk weten of de ongelijkheid die je moet bewijzen zich wel leent tot een oplossing met onze methode. Er bestaan in het algemeen geen regeltjes over welke ongelijkheden wel of niet zullen lukken, maar als je deze bundel uitgelezen hebt, zal je wel een feeling krijgen voor het type problemen dat je met isolated fudging kan oplossen. In de volgende sectie leren we hoe functies van één veranderlijke af te schatten. Dit mogen gekke (continue) functies zijn, maar meestal zal het gaan om rationale functies, occasioneel eens om een irrationale (maar hier ga je dus niet leren hoe je exponentiële of goniometrische functies moet afschatten). De termen van een ongelijkheid zijn echter vaak geen functie van één veranderlijke, dus om de techniek uit deel 3 te kunnen toepassen, moet je aan elke term $f(x, y, z)$ in (het "moeilijke" lid van) de ongelijkheid een functie van één veranderlijke kunnen associëren:

- Als $f(x, y, z)$ eigenlijk een functie is van x, dan ben je klaar met de voorbereiding: je neemt de univariate functie $f(x, 0, 0)$ mee naar deel 3.
- Als $f(x, y, z)$ eigenlijk een functie is van x en y, dan zijn er twee mogelijkheden. Ofwel is f homogeen. (In het tweede voorbeeld is a^2/b een homogene functie van a en b.) Dan neem je de univariate functie $f(x, 1, 0)$ mee naar deel 3. Ofwel is f niet homogeen, maar zijn de variabelen x en y wel te scheiden, i.e., $f(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y)$ of $f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)$ of ... Dan neem je de univariate functie $f_1(x)$ mee naar deel 3. (Voorbeeld: Bilkent 2011. In dit geval krijg je een afschatting $f_1(x)f_2(y) \geq f_3(x)f_2(y)$, waarna je de "eenvoudige" som $\sum f_3(x)f_2(y)$ nog moet afschatten met Cauchy–Schwarz.)
- Als $f(x, y, z)$ een functie is van x en $y+z$, dan moet f homogeen zijn. Je neemt de volgende univariate functie mee naar deel 3: elke $y + z$ vervang je door $3 - x$. Een voorbeeld: als $f(x, y, z) = x^2 + (y + z)^2$, dan neem je de univariate functie $x^2 + (3 - x)^2$ mee naar deel 3. Merk op dat "homogeen zijn" niet uitsluit dat f irrationaal kan zijn. Zo is bijvoorbeeld $f(x, y, z) = \sqrt{2x + y + z}$ homogeen van graad $\frac{1}{2}$ en dus neem je $\sqrt{3 + x}$ mee naar deel 3.
- Als $f(x, y, z)$ een functie is van x en yz, dan moet f homogeen zijn. Je neemt de volgende univariate functie mee naar deel 3: elke yz vervang je door $1/x$. Een voorbeeld: als $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + 2yz}{x}$, dan neem je $(x^3 + 1)/x^2$ mee naar deel 3.
- Als f niet van de bovenstaande vormen is, dan ga je zelf wat moeten aanvoelen welke univariate functie je nodig hebt. Soms kan je er voor zorgen dat f van de bovenstaande vorm wordt door al een eerste afschatting uit te voeren. Zo is $f(x, y, z) = \dfrac{(y + z)^2}{x^2 + 4yz}$ bijvoorbeeld niet van de juiste vorm, maar hij is wel $\geq \dfrac{(y + z)^2}{x^2 + (y + z)^2}$. Deze laatste functie is van de juiste vorm, maar je hebt misschien een prijs betaald door de term op die manier af te schatten (hoe hoog die prijs is, hangt van het probleem af). Soms kan het ook zijn dat de functie niet homogeen is, maar dat het door zo'n afschatting niet meer noodzakelijk is: als $a + b + c = 1$ gegeven is, dan is $a + 4bc$ niet homogeen, maar is de afschatting $\leq a + (b + c)^2 = a + (1 - a)^2$ univariaat. (Cfr. de opgave van de Roemeense TST)

Is isolated fudging dan enkel mogelijk als we aan elke term een univariate functie kunnen associëren? Neen! Maar als het wel zo is, is er een receptje (deel 3) om verder te gaan. Als het niet zo is, zal je zelf creatief moeten zijn: je zal elke term moeten afschatten door “iets”. Voorbeeld:

> (Japan 2005) Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $a + b + c = 1$ aan dat
>
> $$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$
>
> Wel, AM–GM vertelt ons dat
>
> $$3\sqrt[3]{1+b-c} = 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+b-c)} \leq 1 + 1 + (1+b-c) = 3 + b - c.$$
>
> Bijgevolg is
>
> $$\sum a\sqrt[3]{1+b-c} \leq \sum a\frac{3+b-c}{3} = \frac{1}{3}\sum(3a + ab - ac) = a + b + c = 1.$$
>
> Merk op dat de termen niet de juiste vorm hadden om er een univariate functie aan te associëren, en toch hebben we elke term apart kunnen afschatten (we zijn met isolated fudging bezig, hè). We hebben hiervoor op een creatieve manier AM–GM moeten toepassen en daar bestaat jammer genoeg geen recept voor.

In sectie 5 schotelen we een mogelijk receptje voor om ongelijkheden te bewijzen waarvan de termen niet univariaat kunnen worden gemaakt. Dit gaat zeker niet altijd lukken, maar het is het proberen waard. In de volgende twee delen concentreren we ons op de “mooie” gevallen.

3 Afschatting van univariate functies

Disclaimer. Om rechtszaken te vermijden, wil ik eventjes benadrukken dat je niet mag verwachten dat de techniek die nu volgt altijd zal werken. Wat we in deze sectie leren, is beredeneerd gokken welke afschattingen we moeten maken. Als het niet lukt, jammer. Als het wel lukt, leuk, maar het enige dat telt is het eindresultaat: we leren hier hoe we zo’n bounds moeten gokken, maar in een oplossing schrijf je enkel op wat de bound is die je hebt gevonden en pas je die toe op het probleem. In het voorbeeld op de allereerste pagina van dit document staat inderdaad gewoon de bound, want het boeit niemand hoe we eraan zijn gekomen, maar wel wat de implicaties zijn. Dit deel gebeurt dus in de praktijk *behind the scenes*, en als we zien dat er een goed eindresultaat is, bewijzen we dat resultaat en werken we mooi af: we zijn als goochelaars die een truc voorbereiden, we brengen hem enkel als hij werkt en in dat geval verklappen we aan niemand hoe we aan onze magische bound zijn geraakt. Hocus pocus![1]

De reden waarom we univariate functies zo leuk vinden, is dat ze heel handelbaar zijn: we kunnen afgeleiden berekenen en met een tekenonderzoek weten we zelfs waar een functie positief is. Bij veeltermen wordt alles zelfs nóg eenvoudiger, want dan kan je factoren afsplitsen, en als een factor kwadratisch afgesplitst kan worden, dan springt een ongelijkhedenfan een gat in de lucht. De bedoeling is dat we een univariate functie afschatten door een eenvoudigere uitdrukking. We overlopen eventjes wat zoal de mogelijkheden zijn om iets eenvoudiger te maken (hoe we precies aan de afschatting komen, leggen we later uit):

[1] Dit klinkt allemaal erg negatief, maar vergis u niet, want als de techniek werkt, dan is hij om van te smullen.

- *Rationale term – Lineaire afschatting.*
  Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\sum \frac{a^2}{b} \geq a + b + c$$

  Dit volgt uit de sommatie van ongelijkheden van de vorm $a^2/b \geq 2a - b$. We zijn klaar omdat $\sum(2a-b) = a+b+c$. (Merk op dat we in het tweede geval zitten: $a^2/b = f(a, b, c)$ is een homogene functie van a en b, dus we proberen de univariate functie $f(a, 1, 0)$ af te schatten. Later zien we hoe we aan $f(a, 1, 0) \geq 2a-1$ komen en waarom dit impliceert dat we $a^2/b \geq 2a - b$ moeten gebruiken.)

- *Rationale term – Veeltermafschatting.*
  Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ aan dat

$$\frac{a}{a^2+3} + \frac{b}{b^2+3} + \frac{c}{c^2+3} \leq \frac{3}{4}.$$

  Dit volgt uit de sommatie van volgende ongelijkheden:

$$\frac{a}{a^2+3} \leq \frac{a^2+3}{16}.$$

- *Irrationale term – Rationale afschatting.*
  Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $a + b + c = 3$ aan dat

$$\sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1} \geq \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} + \frac{2}{c+1}.$$

  Dit volgt uit de sommatie van volgende ongelijkheden:

$$\sqrt{a^2-a+1} \geq \frac{a^2+1}{a+1} = a - 1 + \frac{2}{a+1}.$$

- *Irrationale term – Irrationale afschatting.*
  (IMO 2001/2) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1.$$

  Dit volgt uit de sommatie van volgende ongelijkheden:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}}.$$

  Dit voorbeeld wordt pas in sectie 5 geanalyseerd.

We zijn klaar om te leren af te schatten en we beginnen bij de afschatting van een functie $f(x)$ door een lineaire functie. We zoeken dus α en β zodat de ongelijkheid $f(x) \geq \alpha x + \beta$ waar is voor alle x.[2] Het is nu belangrijk te weten wanneer je gelijkheid verwacht. Als de termen al inhomogeen

[2] We beschouwen hier het $\geq$–geval, maar $\leq$ werkt uiteraard volledig analoog.

waren, dan moet je echt naar het oorspronkelijke probleem kijken om het gelijkheidsgeval te vinden. Als je gedehomogeniseerd hebt door $y + z$ door $3 - x$ te vervangen, dan verwacht je gelijkheid voor $x = 1$, en als je gedehomogeniseerd hebt door yz door $1/x$ te vervangen, dan verwacht je ook gelijkheid voor $x = 1$.[3] We veronderstellen, bij wijze van voorbeeld, dat we gelijkheid verwachten voor $x = 1$. Dan moet $\alpha + \beta = f(1)$. Dat is alvast één vergelijking. We willen er nog een tweede, en om door te hebben waar we die vandaan moeten halen, beschouwen we een voorbeeld.

> We willen voor alle $x \geq 0$ de functie $f(x) = (4 - x)/(x^2 - 4x + 6)$ lineair naar boven afschatten door $\alpha x + \beta$. Gelijkheid voor $x = 1$ eisen geeft $\alpha + \beta = f(1) = 1$. We willen dus dat
>
> $$4 - x \leq (x^2 - 4x + 6)(\alpha x + \beta) = (x^2 - 4x + 6)(\alpha(x - 1) + 1),$$
>
> i.e., $0 \leq (x-1)(\alpha(x^2-4x+6)+x-2)$. Dit was onze natte droom van in de inleiding van dit univariate deeltje: veeltermen laten afsplitsing van factoren toe. En eigenlijk willen we kwadratische afsplitsing. Inderdaad, als $x-1$ geen factor is van $\alpha(x^2-4x+6)+x-2$, dan verandert de functie $(x-1)(\alpha(x^2-4x+6)+x-2)$ van teken in de buurt van 1, en dat willen we niet! Dus we willen dat $x-1$ een dubbele factor is van $(x-1)(\alpha(x^2-4x+6)+x-2)$, i.e., dat $x = 1$ een wortel is van $\alpha(x^2 - 4x + 6) + x - 2$. Dit geeft $\alpha = \frac{1}{3}$ en dus $\beta = \frac{2}{3}$. De enige mogelijkheid om $f(x)$ naar boven af te schatten door een lineaire functie is dus
>
> $$\frac{4 - x}{x^2 - 4x + 6} \leq \frac{x + 2}{3}.$$
>
> Er zijn nu twee mogelijkheden: ofwel klopt de ongelijkheid en zijn we blij, ofwel klopt hij niet en zullen we iets anders moeten bedenken. In dit voorbeeld klopt hij want hij is equivalent met $x(x - 1)^2 \geq 0$ (dubbel nulpunt in $x = 1$, precies zoals we de afschatting wouden!).

We willen nu een algemene strategie om α en β te vinden. We hebben naast $\alpha + \beta = f(1)$ een tweede vergelijking nodig. Hier zijn (minstens) twee technieken voor:

- De artisanale manier. Dit is zoals we hierboven deden: herschrijf de ongelijkheid naar iets van de vorm $p(x) \geq 0$, waarbij $p(x)$ een veelterm is met een nulpunt in $x = 1$. Eis nu dat $p(x)$ een *dubbel* nulpunt heeft in $x = 1$. Als dat nog niet genoeg is, kan je eisen dat elke kwadratische factor negatieve discriminant heeft (of misschien discriminant nul?). Zo kom je tot extra vergelijkingen.

- De afgeleide manier. Een lineaire afschatting werkt enkel voor $\alpha = f'(1)$ en $\beta = f(1) - f'(1)$, i.e., $\alpha x + \beta = f'(1)(x - 1) + f(1)$. In het algemeen werkt een afschatting van de functie $f(x)$ (met gelijkheid in $x = 1$) enkel als ie van de vorm $f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}f''(1)(x - 1)^2 + \cdots$ is.

Zo, dit geeft een sluitende werkwijze voor het vinden van de enige **kandidaat**–afschatting van een functie door iets lineairs. Wat als deze kandidaatafschatting niet klopt of niets nuttigs oplevert? Dan probeer je in plaats van een lineaire afschatting een veeltermafschatting te vinden. Omdat

[3] Heb je nu door waarom we het som–geval gedehomogeniseerd hebben met behulp van de voorwaarde $x+y+z = 3$ en niet $x + y + z = 1$?

een veelterm willekeurige graad kan hebben, denk je best op voorhand na welke graad je eigenlijk wenst. Als er in de vraagstelling een voorwaarde van de vorm $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ stond, dan kan je misschien een afschatting $\alpha x^3 + \beta$ proberen te vinden. Pas dus op dat je je veelterm niet *te* algemeen neemt, maar al op voorhand kiest hoe je wilt dat hij eruit ziet. Vanaf dan heb je een aantal coëfficiënten die je wil bepalen en waar je dus vergelijkingen voor wil vinden. Dit doe je zoals hierboven: eis gelijkheid voor (bijvoorbeeld) $x = 1$ en doe dan artisanaal verder of eis dat ook de afgeleiden van beide leden gelijk zijn.[4]

Zo, dit geeft een niet zo sluitende werkwijze voor het vinden van kandidaat–afschattingen van een functie door een veelterm. Wat als dit niet werkt? Ofwel geef je isolated fugding op, ofwel zal je iets creatiefs moeten doen. Dit betekent dat je een rationale of zelfs irrationale afschatting probeert, of misschien werkt de techniek uit sectie 5, of . . . Als je iets rationaals probeert, denk je best op voorhand na wat je precies als noemer wil; dat vermindert het aantal onbepaalde coëfficiënten.

Laten we nu de voorbeelden van daarnet eens motiveren door toe te passen wat we geleerd hebben.

- In het eerste voorbeeld poneerden we de afschatting $a^2/b \geq 2a - b$ en dit komt neer op de univariate afschatting $a^2 \geq 2a - 1$. Hoe komen we hier aan?

  We zoeken α en β zodat $a^2 \geq \alpha a + \beta$ voor alle $a \geq 0$ en doen dit artisanaal. We willen gelijkheid voor $a = 1$ dus $\alpha + \beta = 1$. Substitueer dit in de ongelijkheid en herwerk hem tot

  $$0 \leq a^2 - \alpha a - \beta = a^2 - \alpha a - (1 - \alpha) = a^2 - 1 - \alpha(a - 1) = (a - 1)(a + 1 - \alpha).$$

  We willen een dubbel geval van gelijkheid in $a = 1$ om tekenverandering te vermijden, dus we nemen $\alpha = 2$. Dit leidt tot de gok $a^2 \geq 2a - 1$, die we natuurlijk moeten verifiëren: hij is equivalent met $(a - 1)^2 \geq 0$ en dus waar.

- In het tweede voorbeeld poneerden we de afschatting

  $$\frac{a}{a^2 + 3} \leq \frac{a^2 + 3}{16}.$$

  Hoe komen we hier aan? Ons eerste probeersel is lineair: we zoeken α en β zodat $a \leq (a^2 + 3)(\alpha a + \beta)$ voor alle $a \geq 0$ met een dubbel geval van gelijkheid in $a = 1$. Dit kan je artisanaal of via de afgeleide uitwerken. Je krijgt als enige lineaire kandidaatafschatting

  $$\frac{a}{a^2 + 3} \leq \frac{a + 1}{8}.$$

  Dit impliceert dat $\sum a/(a^2 + 3) \leq \frac{1}{8}(a + b + c + 3)$, dus het volstaat nog aan te tonen dat $a + b + c \leq 3$. Dit is waar omwille van AM–QM/Power mean/Cheby/Cauchy/...: $\frac{1}{3}(a + b + c) \leq \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)} = 1$. Klaar. Maar we hebben hier een "zware" stelling gebruikt. Eigenlijk wil je een oneliner, en dat kan als je probeert af te schatten door een veelterm van de vorm $\alpha a^2 + \beta$. Kan je nu nagaan dat we bovenstaande grens krijgen? Is hij waar? Volgt daar het gestelde uit?

[4]Persoonlijke noot: als er meer dan twee onbepaalde coëfficiënten zijn, dan gebruik ik de artisanale manier, i.e., splits ik factoren af van een veelterm en analyseer ik welke extra eis ik wil.

- In het derde voorbeeld poneerden we de afschatting

$$\sqrt{a^2-a+1} \geq \frac{a^2+1}{a+1} = a-1+\frac{2}{a+1}.$$

Hoe komen we hier aan? Hier zou je lineair kunnen afschatten, maar dat is omwille van de vorm van de te bewijzen ongelijkheid niet nuttig: je wil ergens $\frac{2}{a+1}$ introduceren. Daarom schat je niet $\sqrt{a^2-a+1}$ maar $(a+1)\sqrt{a^2-a+1}$ af. We doen dit eens op de afgeleide manier: schrijf $f(a) = (a+1)\sqrt{a^2-a+1}$. Dan is $f(1) = 2$ en $f'(1) = 2$, dus de enige lineaire kandidaatafschatting is $(a+1)\sqrt{a^2-a+1} \geq 2(a-1)+2 = 2a$. Deze afschatting klopt alleszins want hij is equivalent met $(a-1)^2(a^2+3a+1) \geq 0$. Maar hij is niet nuttig, want hij impliceert dat

$$\sum \sqrt{a^2-a+1} \geq \sum \frac{2a}{a+1} = 6 - \sum \frac{2}{a+1},$$

dus dan zou je nog moeten bewijzen dat $\frac{3}{2} \geq \sum 1/(a+1)$, en dat is gewoon niet waar voor alle $a, b, c > 0$ met $a+b+c = 3$. We moeten dus een kwadratische benadering proberen, en hiervoor rekenen we na dat $f''(1) = \frac{5}{2}$. Dit geeft de kandidaatafschatting $f(a) \geq \frac{5}{2}(a-1)^2 + 2(a-1) + 2 = \frac{1}{2}\left(5a^2+6a+5\right)$. Maar deze is dan weer niet waar. Wat is er hier aan de hand, zeg?

Het probeem is eigenlijk dat we met de afgeleide methode te strikt zijn door de beste afschatting te nemen.[5] Wat we willen, is dat er in de afschatting $f(a) \geq \cdots$ na deling door $a+1$ een term $2/(a+1)$ gevormd wordt. Daarom schrijven we de afschatting als $f(a) \geq (\alpha a+\beta)(a+1)+2$. We willen gelijkheid in $a = 1$, dus $2 = f(1) = 2(\alpha+\beta)+2$, i.e., $\beta = -\alpha$. De afschatting is dus equivalent met

$$\begin{aligned}(a+1)(a^3+1) = f(a)^2 &\geq (\alpha(a-1)(a+1)+2)^2 \\ &= \alpha^2(a-1)^2(a+1)^2 + 4\alpha(a^2-1) + 4.\end{aligned}$$

Omdat we een dubbel geval van gelijkheid in $a = 1$ willen, moet $a-1$ een dubbele factor zijn van $(a+1)(a^3+1) - 4\alpha(a^2-1) - 4 - \alpha^2(a-1)^2(a+1)^2$, dus $a-1$ moet een dubbele factor zijn van $a^4+a^3+a+1-4\alpha a^2+4\alpha-4 = (a-1)(a^3+2a^2+2a+3-4\alpha(a+1))$. We willen dus dat $a = 1$ een nulpunt is van $a^3+2a^2+2a+3-4\alpha(a+1)$, i.e., $\alpha = 1$. De kandidaatafschatting is dus $f(a) \geq (a-1)(a+1)+2 = a^2+1$. Er zijn nu opnieuw twee cruciale vragen: is hij waar en is hij nuttig? Ja, want equivalent met $a(a-1)^2 \geq 0$, en ja, want hij geeft

$$\sum \sqrt{a^2-a+1} \geq \sum \frac{a^2+1}{a+1} = \sum(a-1) + \sum \frac{2}{a+1}.$$

[5] Maar verlies het vertrouwen niet in de afgeleide methode: deze geeft vaak de beste afschatting. Wat ik met dit voorbeeld wil aantonen, is dat het voor sommige ongelijkheden belangrijk is de artisanale methode te beheersen.

4 Terugsubstitutie

In de vorige sectie heb je gerekend en kom je (hopelijk) een mooie grens uit. Als de oorspronkelijke term al een univariate functie was, dan ben je klaar. Maar soms moet je je resultaat nog vertalen naar het probleem door terug te homogeniseren. De manier waarop je dit moet doen, hangt af van de situatie. Stel dat $f(x, y, z)$ de term was waar we mee bezig waren.

- Als $f(x, y, z)$ een functie is van x, dan moet je niets meer doen.
- Als $f(x, y, z)$ een functie is van x en y, dan heb je de univariate functie $f(t, 1, 0)$ afgeschat. Stel nu $t = x/y$ in deze afschatting.
- Als $f(x, y, z)$ een functie is van x en $y + z$, dan heb je de univariate functie $f(t, 3 - t, 0)$ afgeschat. Stel nu $t = 3x/(x + y + z)$ in deze afschatting. Als je gedehomogeniseerd hebt door $x + y + z = 1$ te stellen (of dit was gegeven), dan neem je $t = x/(x + y + z)$.
- Als $f(x, y, z)$ een functie is van x en yz, dan heb je de univariate functie $f(t, 1/t, 1)$ afgeschat. Stel nu $t = x/yz$ in deze afschatting.

We hernemen het voorbeeld uit de eerste sectie. We willen bewijzen dat

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

We beschouwen dus de term $f(a, b, c) = a^2/b$. Dit is een functie van a en b, dus we willen $f(t, 1, 0)$ afschatten. Dit deden we al in het vorige deel: $t^2 = f(t, 1, 0) \geq 2t - 1$ want dit is equivalent met $(t - 1)^2 \geq 0$. We homogeniseren opnieuw door in deze afschatting $t = a/b$ te stellen: $a^2 \geq 2ab - b^2$, i.e., $a^2/b \geq 2a - b$. Hieruit volgt de te bewijzen ongelijkheid.

Het inleidend voorbeeld op de eerste pagina is wat serieuzer. We toonden aan dat

$$\frac{a + 4(b + c)}{a^2 + 2(b + c)^2} + \frac{b + 4(c + a)}{b^2 + 2(c + a)^2} + \frac{c + 4(a + b)}{c^2 + 2(a + b)^2} \leq \frac{9}{a + b + c}$$

voor alle $a, b, c > 0$. Wat gebeurt er achter de schermen? De term $(a + 4b + 4c)/(a^2 + 2(b + c)^2)$ is een functie van a en $b + c$, dus we willen de functie

$$f(t) = \frac{a + 4(3 - t)}{a^2 + 2(3 - t)^2} = \frac{4 - t}{t^2 - 4t + 6}$$

naar boven afschatten. De afgeleide methode geeft de kandidaatafschatting $f(t) \leq \frac{1}{3}(t + 2)$. We stellen ons twee vragen: klopt hij en is hij nuttig? Hij klopt want equivalent met $t(t - 1)^2 \geq 0$. Omdat we gedehomogeniseerd hebben door $a + b + c = 3$ te stellen, nemen we $t = 3a/(a + b + c)$ in de afschatting en vinden we dat

$$(a + b + c)\frac{a + 4(b + c)}{a^2 + 2(b + c)^2} \leq \frac{5a + 2b + 2c}{3(a + b + c)}.$$

Dit is de afschatting die we nodig hebben. Onze berekeningen zijn nu niet meer van belang, want dit is hoe we onze oplossing als volleerde goochelaars opschrijven:

Voor een willekeurig positief reëel getal x volgt uit $x(x-1)^2 \geq 0$ dat

$$\frac{4-x}{x^2-4x+6} \leq \frac{x+2}{3}.$$

Passen we dit nu toe voor $x = 3a/(a+b+c)$, dan vinden we dat

$$(a+b+c)\frac{a+4(b+c)}{3(a^2+2(b+c)^2)} \leq \frac{5a+2b+2c}{3(a+b+c)}.$$

Er volgt dat

$$\begin{aligned}\sum \frac{a+4(b+c)}{a^2+2(b+c)^2} &\leq \frac{5a+2b+2c}{(a+b+c)^2} + \frac{2a+5b+2c}{(a+b+c)^2} + \frac{2a+2b+5c}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{9(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{9}{a+b+c}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Samenvattend stappenplan

$\boxed{1}$ Isoleer termen waarvan je denkt dat ze samen horen in de ongelijkheid.

$\boxed{2}$ Dehomogeniseer zo'n term zoals beschreven in de sectie over de voorbereiding. Zij $f(x)$ de univariate functie die je zo bekomt.

$\boxed{3}$ Vind een kandidaat–afschatting:

- Ga na wanneer je gelijkheid verwacht, zeg in $x = x_0$.[6]
- Kies de vorm van de afschatting: lineair, veelterm, rationaal of gek.
- Artisanale voortzetting: probeer vergelijkingen te vinden voor de onbepaalde coëfficiënten door gelijkheid te eisen voor $x = x_0$, te herwerken tot $(x-x_0)(\cdots) \geq 0$, te eisen dat $\cdots$ een nulpunt heeft in $x = x_0$, enz.
- Afgeleide voortzetting: lineaire afschatting $f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ (raaklijn!), kwadratische afschatting $\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \ldots$
- Pro's en contra's: afgeleide geeft scherpere bounds maar is niet flexibel. Artisanaal is minder machinaal (je moet goed weten wat je wilt, namelijk een factor $(x-x_0)^2$) maar is wel flexibel: als je nodig hebt dat de constante term gelijk is aan 2 (omdat je dit weerspiegeld ziet in de te bewijzen ongelijkheid), dan moet je voor de artisanale optie gaan.

[6] Merk op dat er in de voorbeelden van sectie 3 steeds gelijkheid werd verwacht in $a = 1$. Maar als de voorwaarde $a+b+c = 1$ zou zijn, dan verschuift het gelijksheidsgeval uiteraard. Let hier voor op!

$\boxed{4}$ Controleer of je afschatting klopt: herschrijf hem tot de vorm $p(x) \geq 0$ en ga na of dit waar is. In ieder geval moet je het "dubbel geval van gelijkheid" kunnen zien in de ontbinding van $p(x)$, i.e., je gaat waarschijnlijk $(x-1)^2$ of $(3x-1)^2$ als factor krijgen. Als je dit niet uitkomt, dan heb je een rekenfout gemaakt en moet je deze afschatting nog niet afschrijven en gewoon opnieuw rekenen!

$\boxed{5}$ Controleer of je afschatting nuttig is: sommeer de afschattingen (die je misschien opnieuw hebt moeten homogeniseren) en zie of je uitkomt wat je moest bewijzen (of alleszins dichter bij je doel bent gekomen).

$\boxed{6}$ Indien stappen 4 of 5 een negatief antwoord hebben gekregen, keer dan terug naar stap 3, maar verander de vorm van je afschatting.

Ben je er klaar voor? Een aantal opwarmopgaven om het afschatten wat in de vingers te krijgen:

1. Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat
$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

2. Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat
$$\frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2} \geq a + b + c.$$

3. Toon voor alle $a, b, c > 0$ met $a + b + c = 1$ aan dat. Toon aan dat
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

4. Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat
$$\frac{a^5}{a^3+b^3} + \frac{b^5}{b^3+c^3} + \frac{c^5}{c^3+a^3} \geq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

5. (Nesbitt) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

5 Een niet–univariaat alternatief

Op AoPS kom je bij de zoekresultaten over "isolated fudging" onder andere terecht op de tweede vraag van IMO 2001: voor alle $a, b, c > 0$ geldt dat
$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1.$$

De klassieke truc waarvan deze vraag het schoolvoorbeeld is, is de afschatting van elke term in een ongelijkheid door een term van de vorm $a^r/(a^r + b^r + c^r)$ voor een zekere r. Dit is niet de vorm van isolated fudging waar we op geoefend hebben (omdat de termen geen functie zijn van a en $b+c$ of zo), maar het is wel de juiste filosofie: elke term individueel afschatten zodat de som eenvoudiger wordt, in dit geval zelfs $\sum a^r/(a^r+b^r+c^r) = 1$.

Op naar de oplossing van de IMO–vraag! We proberen een r te vinden zodat $a/\sqrt{a^2+8bc} \geq a^r/(a^r+b^r+c^r)$. Door $b=c=1$ te nemen, wordt dit $a^2(a^r+2)^2 \geq a^{2r}(a^2+8)$, i.e., $4a^{r+2}+4a^2 \geq 8a^{2r}$. Dit is equivalent met $a^r - 2a^{2(r-1)} + 1 \geq 0$, dus als $2(r-1) = r/2$, dan staat hier $(a^{r/2}-1)^2 \geq 0$. We hopen dus dat $r = 4/3$ werkt. (Je kan hier ook op een andere manier toe geraken: de verschilfunctie $a^r - 2a^{2r-2}+1$ moet overal positief zijn en een minimum hebben in 1, dus je kan zijn afgeleide in 1 gelijk stellen aan nul: $r - 2(2r-2) = 0$. Dit geeft ook $r = 4/3$.) Om aan te tonen dat $r = 4/3$ voldoet, moeten we bewijzen dat

$$(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3})^2 \geq a^{2/3}(a^2+8bc).$$

Schrijven we $x = a^{2/3}$ enz., dan is dit equivalent met $2x^4(y^4+z^4)+(y^4+z^4)^2 \geq 8x^2y^3z^3$. Dit laatste is waar omwille van AM–GM:

$$\begin{aligned} 2x^4(y^4+z^4)+(y^4+z^4)^2 &\geq 4x^4y^2z^2+4y^4z^4 = 4y^2z^2(x^4+y^2z^2) \\ &\geq 8y^2z^2\cdot x^2yz = 8x^2y^3z^3. \end{aligned}$$

We hebben dus bewezen[7] dat

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}.$$

Sommeer nu de analoge gelijkheden en je hebt een IMO–vraag opgelost.

6 Opgaven

Je bent nu klaar voor dertig opgaven, allemaal in de filosofie van isolated fudging. Bij sommigen oefen je het isoleren (bv. opgave 3) maar bij de meeste zit de moeilijkheid hem in het afschatten. Hoedanook veel plezier!

1. Toon voor alle $a,b,c>0$ aan dat
$$\frac{a^2-bc}{b+c+2a}+\frac{b^2-ca}{a+c+2b}+\frac{c^2-ab}{a+b+2c} \geq 0.$$

2. Toon voor alle $x,y,z>0$ met $x+y+z=1$ aan dat
$$\frac{x^2+3xy}{x+y}+\frac{y^2+3yz}{y+z}+\frac{z^2+3zx}{z+x} \leq 2.$$

3. (Junior Balkan MO 2012) Toon voor alle $a,b,c>0$ met $a+b+c=1$ aan dat
$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+6 \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right).$$

[7] De moeilijkheid ligt hem eigenlijk niet in het *bewijzen* van de afschatting, maar in het *beredeneerd gokken*.

4. (Spanje 2010) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geq\frac{15}{8}.$$

5. (Bilkent Mei 2007) Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $a + b + c = 1$ aan dat

$$\frac{1}{a(2-a)+bc}+\frac{1}{b(2-b)+ac}+\frac{1}{c(2-c)+ab}\geq\frac{9}{2}.$$

6. (Polen 1996) Toon voor alle $a, b, c \geq \frac{-3}{4}$ met $a + b + c = 1$ aan dat

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}.$$

7. (Korea 2011, Albanië TST 2012) Wat is de maximale waarde van de uitdrukking

$$\frac{1}{x^2-4x+9}+\frac{1}{y^2-4y+9}+\frac{1}{z^2-4z+9}$$

waarbij x, y, z positieve reële getallen zijn met $x + y + z = 1$?

8. Toon voor alle $x, y, z \geq 0$ met $x + y + z = 1$ aan dat

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leq\frac{27}{10}.$$

9. (Japan 1997) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}.$$

10. Het feit dat $\sum a^r/(a^r + b^r + c^r) = 1$ is cruciaal voor sommige problemen, maar er zijn nog andere nuttige identiteiten die een alternatief bieden voor ongelijkheden waarvan de termen niet univariaat kunnen worden gemaakt. Een voorbeeld:

    (a) (VWO 2005, ronde 2) Stel dat x, y en z voldoen aan $xyz = 1$. Bepaal dan

    $$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx},$$

    als er gegeven is dat dit een constante is.

    (b) Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $abc = 1$ aan dat

    $$\sum\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}\leq 1.$$

11. (Baltic Way 2011) Toon voor alle $a, b, c, d \geq 0$ met $a + b + c + d = 4$ aan dat

$$\frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}\leq\frac{4}{9}.$$

12. (Baltic Way 2002) Toon voor alle $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ met $x_1 + \cdots + x_n = 1$ aan dat

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

13. (Gen. Roemeense JBMO TST 2013) Zij $p \in [-3, 5]$. Toon dan voor alle $a, b, c \geq 0$ met $a + b + c = 1$ dat

$$\frac{1-pa^2}{a+bc} + \frac{1-pb^2}{b+ca} + \frac{1-pc^2}{c+ab} \geq \frac{3}{4}(9-p).$$

14. (Turkije JBMO TST 2013) Toon voor alle $a, b, c > 0$ met $a + b + c = 1$ aan dat

$$\sum \frac{a^4+5b^4}{a(a+2b)} \geq 1 - ab - bc - ca.$$

15. (Bilkent April 2011) Zijn $a, b, c \geq 0$ zodat $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$. Toon aan dat

$$\sum \frac{b(a+1)(2b+1)}{a(b+1)(5b+1)} \geq \frac{3}{2}.$$

16. (Japan 2010) Toon voor $x, y, z \geq 0$ aan dat

$$\sum \frac{1+z(x+y)}{(1+x+y)^2} \geq 1.$$

17. Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\sum \frac{a^2}{3a^2+b^2+2ca} \leq \frac{1}{2}.$$

18. (USAMO 1997) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

19. (IMOSL 1996) Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $abc = 1$ aan dat

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

20. (USAJMO 2012/3) Toon voor $a, b, c > 0$ aan dat

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

21. (USAMO 2003) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

22. (Western China MO 2004) Toon voor alle $a, b, c, d, e \geq 0$ met $\sum \dfrac{1}{1+a} = 1$ aan dat

$$\sum \frac{a}{4+a^2} \leq 1.$$

23. Bewijs voor alle $a, b, c > 0$ dat

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

24. (USAMO Summer Program 2002) Toon voor $a, b, c > 0$ aan dat

$$\sqrt[3]{\frac{4a^2}{(b+c)^2}} + \sqrt[3]{\frac{4b^2}{(c+a)^2}} + \sqrt[3]{\frac{4c^2}{(a+b)^2}} \geq 3.$$

25. (Marokko) Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $ab + bc + ca + 2abc = 1$ aan dat

$$\frac{1}{4a+1} + \frac{1}{4b+1} + \frac{1}{4c+1} \geq 1.$$

26. (USAMO 2004/5) Toon voor alle $a, b, c > 0$ aan dat

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a+b+c)^3.$$

27. Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ aan dat

$$(a^3 + a + 1)(b^3 + b + 1)(c^3 + c + 1) \leq 27.$$

28. Toon voor alle $a, b, c \geq 0$ met $ab + bc + ca + abc = 4$ aan dat

$$\frac{a}{a+4} + \frac{b}{b+4} + \frac{c}{c+4} \geq \frac{3}{5}.$$

29. (IMO 2012/2) Zij $n \geq 3$ een natuurlijk getal en zijn $a_2, a_3, \ldots, a_n$ positieve reële getallen zodat $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Toon aan dat

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

30. (a) Schat de volgende rationale functie naar beneden af met een veelterm:

$$\frac{x(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 - x^2)}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

(b) (IMO 2005/3) Zijn x, y en z positieve reële getallen met $xyz \geq 1$. Toon aan dat

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$