De problem-solving-bundel

olympia

augustus 2012

1 combinatoriek + algemene problem-solving

1.1 basis

dubbeltellen

Men kan bepaalde eigenschappen combinatorisch bekijken om eigenschappen elegant te bewijzen.

* Het is belangrijk dat men dus de klassieke formules om te tellen kent:
k elementen in volgorde plaatsen met keuze uit n elementen kan op $\frac{n!}{(n-k)!}$ manieren,
indien elementen meerdere keren mogen voorkomen, hebben we n^k manieren om rijen te vormen van k elementen
indien de volgorde niet belangrijk is, hebben we $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ manieren om k elementen te selecteren uit n waarden
het aantal permutaties van een set $\{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$ waarbij a_i k_i keer voorkomt en er in totaal n elementen zijn, is gelijk aan $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!}$
Deze linken op 2 manieren aan een zelfde probleem, kan leiden naar een contradictie of een ongelijkheid.

extremaalprincipe

Men bekijkt het kleinste of grootste element van een verzameling en door naar bepaalde eigenschappen te kijken of bewerkingen uit te voeren,
zien we dat er een groter/ kleinere waarde is, zodat ons extremum fout is, waardoor er ∞ veel elementen waarden zijn
OF de vraag onmogelijk is.

We kunnen een oneindige afdaling doen bvb. om te zien dat er geen enkele waarde is die voldoet.

identiteiten

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

$n^4 + 4x^4 = (n^2 + 2x^2 - 2xn)(n^2 + 2x^2 + 2xn)$ (identiteit van Sophie-Germaine)

$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{i=k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p}$ met

$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + p_0$ en $n = n_k p^k + \cdots + n_0$ (indentiteit/stelling van Lucas)

$ap + bq$ met $ggd(p, q) = 1$ en $a, b \in \mathbb{N}$ kan alle waarden groter dan $pq - q - p$ aannemen, $pq - p - q$ is de grootste waarde die niet zo te schrijven is. (postzegelidenteit)

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (\frac{n}{e})^n$ (stelling/ identiteit van Stirling) [vrij juist voor grote waarden]

Het principe van inclusie exclusie (PIE)

Zij $A1, A2, \cdots, A_n$ eindige verzamelingen. Dan geldt
$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| =$
$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$
$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n|$
$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$
$\cdots$
$+(-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

Voorbeeld 1.1. *Bepaal alle oplossingen voor $x^5 + 2y^5 = 4z^5$ in $\mathbb{Z}$.*

Bewijs. We zien dat $(0, 0, 0)$ een oplossing is en er niet exact 1 of 2 elementen 0 kan zijn.

We bekijken nu een andere oplossing (x, y, z)

We merken op dat x even is, maar dan is $4|4z^5 - x^5$ zodat $4|2y^5$ en dus $2|y$.
Vervolgens geldt dat $32|LL$ en dus moet het rechterlid dit ook zijn, zodat $2|z$.
$(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ is dus ook een oplossing, analoog wordt $(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}, \frac{z}{2^n})$ ook een oplossing.
De 3 getallen worden dus steeds kleiner met oneindige afdaling, maar dan kunnen ze niet geheel blijven waaruit we concluderen dat er geen andere oplossng was.

□

1. Zij n een oneven natuurlijk getal groter dan 1 en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gehele getallen.

   Voor iedere permutatie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiren we $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$.

   Bewijs dat er - voor iedere a - een permutatie $b \neq a$ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ bestaat zodat $n!$ een deler is van $S(a) - S(b)$.

   link

2. We definieren $p(n)$ als het aantal manieren om n te schrijven als de som van positieve getallen $\in \mathbb{N}$. Bewijs dat $p(n) - p(n-1)$ gelijk is aan het aantal manieren om n te schrijven als een som van positieve getallen $\in \{2, 3, 4, 5 \cdots\}$.

   link

3. Definieer
$$a_n = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + 4}}$$
   voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ en stel $b_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Toon aan dat
$$b_n = \frac{\sqrt{2n^2 + 2}}{\sqrt{n^2 + 2n + 2}}$$
   en dat
$$\frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{n^3}.$$

   link

4. Beschouw de verzameling $S = \{1, 2, \cdots, 280\}$. Bepaal het kleinste positieve gehele getal n met de eigenschap dat in elke uit n elementen bestaande deelverzameling van S er 5 elementen te vinden zijn die paarsgewijs onderling ondeelbaar zijn. link

5. $n, k \in \mathbb{N}$ en S is een verzameling van n punten in een vlak.

   Dit op zo'n wijze dat er geen 3 punten collineair zijn en ieder punt A minimum k punten heeft die op een zelfde afstand van A liggen.

   Bewijs dat $k < 0.5 + \sqrt{2n}$

   link

1.2 bedekkingen

Soms wordt in een vraag de mogelijkheid om iets te bedekken gevraagd.

Door een kleuring te gebruiken (enkele vakken in groepen verdelen) en eigenschappen zoals de pariteit te bekijken per object,
probeert men te bewijzen dat het al dan niet kan.

Voorbeeld 1.2. *Bewijs dat een $m * n$rechthoek enke volledig bedekt kan worden met $d * 1$-blokken als $d|m$ en/ of $d|n$.*

Bewijs. Het is triviaal dat $d|mn$ moet gelden.

Bekijk het rechthoek als de unie van roosterpunten, zodat $(1,1),(1,n),(m,n),(m,1)$ de hoekpunten zijn.

Kleur (i,j) met een kleur $t \equiv i+j \pmod d$ zodat $t \in \{1,2,\cdot,d\}$ zit.

Het is duidelijk dat ieder $d*1$ blokje nu ieder kleur exact 1 keer bedekt.

Er moet dus gelden dat ieder kleur even vaak voorkomt, wat niet zo is:

Zij $m = kd + p$ en $n = dl + q$, dan bevat het $m * dl$ bord ieder kleur even vaak, alsook het $kd * q$-bord.

Het overige $p * q$ bord kan onmogelijk ieder kleur even vaak hebben.
Omdat $d|pq$ moeten $ggd(d,q)$ en $ggd(d,p) > 1$ zodat het volgende geldt:

Als $p + q \leq d$ komt het kleur d er niet voor of slechts 1 keer terwijl $pq > d$.
Als $p + q > d$ komt het kleur d er $q + p + 1 - d$ keer voor, terwijl kleur $d - 1$ er $q + p + 2 - d$ keer voorkomt.
Contradictie en dus komt niet ieder kleur even vaak voor en is er geen bedekking mogelijk.

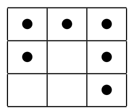
□

1. We hebben een $9 * 9$schaakbord waarvan er 46 vakjes gekleurd worden in't rood, bewijs dat er een $2 * 2$vierkant kan worden gevonden waarvan er minimum 3 rood zijn. link

2. We verdelen een vierkant in enkele rechthoeken die heel het vierkant bedekken zonder overlapping. Bewijs dat als iedere lijn // met een zijde van het vierkant het binnenste van een rechthoek snijdt, niet alle rechthoeken aan de omtrek van het vierkant grenzen.

   link

3. Bepaal alle $m \times n$ rechthoeken die kunnen bedekt worden met "haken" zoals aangegeven in de figuur, die bestaan uit 6 eenheidsvierkanten (zie figuur met de 6 gevulde vierkantjes). Rotaties en spiegelingen van haken is toegelaten. De rechthoek dient bedekt te zijn zonder gaten noch overlappingen en geen enkel stuk van een haak mag buiten de rechthoek vallen.

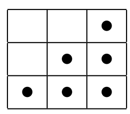
   link

4. We hebben een $999 * 999$ bord waarop we een stuk plaatsen die op de volgende manier beweegt: het kan naar een ander vlakje gaan van het bord als de 2 vierkanten een zijde gemeenschappelijk hebben en iedere stap staat loodrecht op de vorige (men stapt dus nooit in 1 keer over een $1 * 3$rechthoek). Men wil een zo lang mogelijke cyclus maken,waarbij men ieder vlakje slechts 1 keer bewandelt en eiindigt bij het eerste vlakje (een gesloten kring dus). Hoeveel vakken kan die cyclus maximaal bevatten?

   link

5. Een trapvormige doos met 3 treden van breedte 2 is gemaakt uit 12 eenheidskubusjes. (zoals de 6 bolletjes, maar met dikte 2)
   Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor het mogelijk is om een kubus met zijde n te maken als je slechts beschikt over dergelijke bouwstenen.

   link



1.3 inductie

Bij inductie wordt een uitdrukking bewezen voor alle natuurlijke getallen vanaf k, dit door het te bewijzen voor k. (inductiebasis IB)
Vervolgens als het geldt voor n, bewijst men dat het ook geldt voor $n+1$.

Bij volledige inductie bewijst men bij de tweede stap dat de vraag geldt voor $n+1$ als het waar was $\forall i \in \{k, k+1 \cdots, n\}$

Voorbeeld 1.3. *(kleine stelling van Fermat) Er geldt dat* $n^p \equiv n \pmod p$ *als* p *priem is* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Voor $n = 0$ en 1 is de vraag de triviaal. (IB)
Als de vraag geldt voor n, bewijzen we dat $(n+1)^p \equiv n+1 \pmod p$.
Lemma: Er geldt dat $p|\binom{p}{i}$ als $0 < i < p$ omdat $i!, (p-i)!$ geen factoren p bevatten.
$(n+1)^p = n^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} n^i \equiv n^p + 1 \equiv n+1 \pmod p$ door de inductiebasis en ons lemma.
Met inductie geldt de stelling van Fermat nu voor alle getallen $n \in \mathbb{N}$.

□

vb.'en

1. $n \in \mathbb{N}$, bepaal alle getallen x waarvoor geldt dat

$$0 = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \cdots + \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)!}$$

   link

2. k is een vast natuurlijk getal.
   Een winkelketen wil zoveel mogelijk sombrero's verkopen.
   Iedere klant kan 2 anderen een sombrero doen kopen na zijn aankoop (het telt niet als de klant door iemand anders al overhaald was).
   Iedere klant die zo (direct of via keten) minimum k personen een sombrero liet kopen, wint een DVD. Bewijs dat wanneer men n sombrero's verkocht, men maximaal $\frac{n}{k+2}$ DVD's geeft moeten weggeven.

   link

3. $n > 0$ is een natuurlijk getal .
   Op een balans willen we gewichten van $2^0, 2^1, \cdots 2^{n-1}$ kilo plaatsen zodat ieder gewicht elk op zijn beurt wordt geplaatst op zo'n wijze dat de rechtste schaal nooit zwaarder weegt dan de linkse.
   Hoeveel manieren zijn er hiervoor?

   link

4. Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}_0$ de verzameling $\{2, 3 \cdots, 3n+1\}$ verdeeld kan worden in n triplets die de zijden van een stompe driehoek zijn.

   link

5. Voor elk positief geheel getal n wordt S(n) als volgt gedefinieerd: S(n) is het grootste positieve gehele getal zodanig, dat voor elk natuurlijk getal $k \leq S(n)$ het getal n^2 te schrijven is als de som van k kwadraten van positieve gehele getallen. (a) Bewijs dat $S(n) \leq n^2 - 14$ voor alle $n > 4$. (b) Bepaal een getal n waarvoor geldt $S(n) = n^2 - 14$. (c) Bewijs dat er oneindig veel positieve gehele getallen zijn waarvoor geldt $S(n) = n^2 - 14$.

   link

6. Zijn $A_1, \ldots, A_n$ twee aan twee verschillende deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bewijs dat er een element $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ is zodat de verzamelingen $A_i \setminus \{x\}$ allemaal verschillend zijn.

   link

7. In het gecoordinatiseerde vlak beschouwt men een eindige verzameling roosterpunten V . Is het mogelijk alle punten van V met 1 van beide kleuren, rood of wit, te kleuren zo, dat aan de volgende voorwaarde is voldaan: voor elke rechte D evenwijdig aan 1 van de coordinaatassen is de absolute waarde van het verschil tussen het aantal rode punten en het aantal witte punten dat op D ligt kleiner dan of gelijk aan 1.

   link

8. Bepaal alle gehele getallen $n > 0$ waarvoor er natuurlijke getallen $a_1, a_2 \cdots a_n$ bestaan zodat

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}}.$$

   link

1.4 invariantie en contradictie

Wanneer men wil bewijzen dat iets niet kan bij een combinatorische vraag, zijn er enkele manieren die vaak werken:

I Men zegt vanuit het ongerijmde dat de vraag wel kan opgelost worden en door de eigenschappen van de oplossing te bekijken,
bekomt men een contradictie waardoor er geen oplossing kon zijn (het ongerijmde was fout)

II Men bekijkt een eigenschap die invariant is in de vraag, waarbij die eigenschap bij de start en het einde verschillend is, waaruit volgt dat we het einde nooit kunnen bereiken.

III Men gebruikt een eigenschap die monotoon is bij iedere stap met een minimaal verschil, wanneer de eigenschap begrensd is, zijn er slechts een eindig aantal oplossingen.

Voorbeeld 1.4. *We hebben de getallen van* 1 *tot* 2012^9 *in een pot gestoken.*
Iedere keer als we 2 *getallen* x *en* y *eruit halen, worden ze vervangen door* $(x-1006)(y-1006)+1006$ *en steken dit ene getal terug in de pot.*
Welk getal kunnen we vinden als er slechts 1 *getal meer in de pot zit?*

Bewijs. Merk op dat het getal 1006 en x vervangen wordt door 1006 en dit getal invariant blijft (in de pot terug wordt gestoken).

Dit getal blijft dus in de pot en zal het laatste getal 1006 zijn.

$\square$

1. 5 Lege emmers met een inhoud van 2 liter staan op de hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. Assepoester en haar boze stiefmoeder voeren afwisselend een stap uit.
   De stiefmoeder mag bij haar stap telkens 1 liter water verdelen over de 5 emmers zoals ze wil.
   Daarna mag Assepoester 2 emmers die naast elkaar staan kiezen en ledigen.
   Indien een emmer kan overlopen door de stiefmoeder wint ze, in het andere geval Assepoester, wie heeft een winnende strategie?

   link

2. Zij $r \geq 2$ een vast natuurlijk getal, en zij F een oneindige familie van verzamelingen, allemaal van grootte r, en geen twee ervan zijn disjunct. Bewijs dat er een verzameling bestaat van grootte $r-1$ die iedere verzameling uit F snijdt.

   link

3. We hebben n dubbelkleurige stenen die we plaatsen in een rij. Bij de start wijzen ze allen met hun witte kant naar boven en in iedere stap kiezen we een witte steen met 2 buren , waarna we de buren omdraaien en de witte steen wegnemen. (de stenen zijn zwart-wit bvb) Bewijs dat we $n-2$ beurten lang kunnen spelen aesa $3 \not| n-1$.

   link

4. Een stapel van n kiezelsteentjes wordt in een vertikale kolom geplaatst. Deze configuratie is volgens de volgende regels opgesteld. Een kiezelsteentje kan verplaatst worden als het bovenaan een kolom ligt die minstens twee kiezelsteentjes meer bevat dan de kolom rechts ervan (als daar geen kiezelsteentjes liggen, mag je dit beschouwen als een kolom met 0 kiezelsteentjes). In iedere fase kies je een kiezelsteentje dat beweegbaar is, en verplaats je het naar de top van de kolom rechts ervan. Als er geen kiezelsteentjes meer verplaatst kunnen worden, noemen we dat een finale configuratie. Voor iedere n, toon aan dat, ongeacht welke keuzes er gemaakt worden in iedere fase, de finale configuratie uniek is. Omschrijf deze configuratie in termen van n.

   link

5. We hebben een eindig aantal punten in het vlak waarvan er geen 3 collineair zijn, die we met S noteren. Een windmolen is een proces dat begint met een rechte l die door 1 punt $P \in S$ gaat. De lijn draait et de klok meer om het draaipunt P to er voor't eerst een ander pnt van S op deze lijn ligt, dat nieuwe punt wordt het nieuwe draaipunt. We zeggen dat Q een klap van de molen krijgt. De lijn draait nu met de klok mee om Q en de windmolen draait zo oneindig door. Laat zien dat we punt P van S en een lijn l door P kunnen kiezen zodat er een windmolen ontstaat waarbij elk punt van S ∞ veel klappen van de molen krijgt.

   link

1.5 duivenhokprincipe (DVH-principe)

Zijn $n, k \in \mathbb{N}_0$.
Als men n duiven verdeelt over k duivenhokken, dan bestaat er een duivenhok dat minstens $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ duiven bevat.

Voorbeeld 1.5. *Binnen een cirkel met straal 16 liggen 650 gegeven punten.*
Definieer een ring als het vlakdeel dat begrepen is tussen twee concentrische cirkels met stralen 2 en 3 respectievelijk.
Bewijs dat men een ring kan plaatsen zodat minstens 10 van de 650 punten bedekt worden door deze ring.

Bewijs. Maak de cirkel met straal 16 nog iets groter tot een straal van 16.
Teken rond ieder van de 650 punten een ring.
De som van de oppervlakten van de ringen is $650 * 5\pi = 3250\pi$ en deze liggen allen in de cirkel met oppervlakte 361π.
Toevallig is $3250 = 9 * 361 + 1$ zodat er wegens 't DVH-principe een punt is dat in 10 ringen ligt.
Wanneer men nu een ring legt met centrum dat punt, waren er min. 10 centra van die 650 punten op een afstand tussen 2 en 3 zodat ze op onze geplaatste cirkel liggen.
Hiermee is het gevraagde bewezen.

$\square$

1. Bewijs dat iedere deelverzameling met 55 elementen uit $\{1, 2, \cdots, 100\}$ minimum 2 elementen heeft met verschil 9.

   link

2. (i) 15 stoelen worden geplaatst rond een cirkelvormige tafel met bijhorende naamkaartjes voor de 15 gasten. De gasten merken deze kaartjes echter niet op, en het blijkt dat niemand op de juiste plaats zit. Toon aan dat de tafel zodanig gedraaid kan worden dat er tegelijkertijd twee mensen wel op de juiste plaats zitten. (ii) Geef een voorbeeld van een schikking waarbij 1 iemand op de juiste plaats zit en elke rotatie van de tafel ervoor zorgt dat er maximum 1 op de juiste plaats zit.

   link

3. Op een $n*n$-bord worden alle getallen uit $\{1, 2, \cdots, n^2\}$ geplaatst op een apart vakje. Bewijs dat er 2 vakjes zijn die met een zijde aan elkaar grenzen zodat het verschil tussen hun waarden $\geq n$ is.

   link

4. 6 Vragen werden gesteld op een IMO, zodat ieder paar van problemen door meer dan 40 Niemand kon alle vragen. Bewijs dat er minimum 2 deelnemers 5 vragen oplosten. *** Geldt dit ook als we ≥ 0.4 hebben?

   link

5. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn reeele getallen zodat $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Bewijs dat, $\forall k \in \mathbb{N}$ zodat $k \geq 2$, er gehele getallen $a_1, a_2, \cdots a_n$ bestaan, niet allen gelijk aan 0, zodat $|a_i|\ lek1$ voor alle i en zodat $|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$.

   link

6. 21 meisjes en 21 jongens deden mee in een wiskunde-competitie. Het bleek dat iedere deelnemer maximum zes problemen had opgelost, en voor iedere 2 deelnemers bestaande uit een jongen en een meisje, was er minstens n probleem dat zowel door de jongen als het meisje was opgelost. Toon aan dat er een probleem was dat opgelost werd door minstens drie jongens en drie meisjes.

   link

7. Zij p een oneven priemgetal en n een natuurlijk getal. In het cordinatenvlak liggen er acht verschillende punten met gehele cordinaten op een cirkel met diameterlengte p^n. Bewijs dat er een driehoek bestaat met zijn hoekpunten onder de gegeven punten zodanig dat de kwadraten van de lengtes van zijn zijden natuurlijke getallen zijn die deelbaar zijn door p^{n+1}.

   link

1.6 winnende strategieen

Bij een vraag moeten we bewijzen dat iemand een winnende strategie heeft bij een spel,
dit kan door een kleuring of modulorekenen of andere elegante eigenschappen die worden uitgebuit.

stelling van Zermelo

Deze stelling zegt dat ieder spel tussen 2 personen waar toeval niet in meespeelt, geen gelijkspel mogelijk is en de spelers elk op hun beurt een zet doen:
1 van de 2 spelers geeft dan een winnende strategie.

Voorbeeld 1.6. *(QED-competitie)*
ALbert en Philip bestellen een zak met 2011 *frieten. Albert start met het eten van enkele frieten en eet om zijn beurt met Philip. Ze vorken* $1, 2, 5$ *frietjes op per keer. Degene die de laatste friet opeet, betaalt de rekening. Bewijs dat Philip zijn portemonnee kan laten zitten.*

Bewijs. Als Albert 1 frietje neemt, neemt Philip er 2.
Nam Albert er 2 of 5 neemt Philip er 1. Op die manier is er na Philip's beurt steeds een 3voud opgegeten, zodat hij niet de 2011^{de} friet at.

□

vb.'en

1. Het $Y2K$ spel wordt gespeeld op een 1×2000 rooster als volgt: twee spelers schrijven elk op beurt een S of een O op een leeg vakje. De eerste speler die eerst drie opeenvolgende vakjes kan maken met SOS wint het spel. Als alle vakjes gevuld zijn zonder SOS te produceren, dan eindigt het in een gelijkspel. Als de ene speler begint, bewijs dan dat de andere speler een winnende strategie heeft.

   link

2. Arne en Bart spelen op een 8×8 schaakbord volgend spel: beginnend met Arne kleuren ze om de beurt een nog niet gekleurd veld, Arne in het rood en Bart in het blauw. De winnaar is degene die als eerste een 2×2 vierkant helemaal in zijn eigen kleur kan kleuren. Bewijs dat Bart altijd kan voorkomen dat Arne wint.

   link

3. Een rij van 2009 kaarten, die elk een gouden en een zwarte zijde hebben, ligt op tafel. Bij het begin liggen alle kaarten met hun gouden zijde naar boven. Twee spelers, spelen een spel waarbij afwisselend 50 opeenvolgende kaarten worden gekozen waarvan de meest linkse kaart met goud boven lag en draait hierbij die 50 kaarten om. Bepaal of dit spel altijd eindigt en wie er een winnende strategie heeft/ altijd kan winnen?

   link

4. We beschouwen een polynoom $f(x) = x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + \cdots + a_1x + a_0$.
   Albert Einstein en Homer Simpson spelen een spel waarbij ze om hun beurt 1 v.d. coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{2011}$ een waarde geven. Albert start.
   Na 2012 zetten is het spel gedaan, wanneer alle coefficienten ingevuld zijn.
   Homer wil dat $f(x)$ deelbaar is door $m(x)$ en Einstein wint als dit niet zo is.
   (a) Wie kan winnen als $m(x) = x - 2012$?
   (b) Wat als $m(x) = x^2 + 1$?

   link

5. Het liegebeestspel wordt gespeeld door 2 spelers A en B.
   Bij de start kiest A natuurlijke getallen x, N met $1 \leq x \leq N$ en zegt enkel de waarde N aan B.
   Speler B mag nu enkel vragen stellen door een set S te geven aan A en vragen of x in S zit. (hij mag meerdere keren de zelfde verzameling geven)
   A antwoordt met ja of nee , maar mag liegen op zo'n wijze dat tussen iedere $k+1$ opeenvolgende vragen, hij minstens 1 keer eerlijk antwoordde.
   B mag zoveel vragen (eindig natuurlijk) stellen en moet dan een set X geven met n gehele getallen. Als $x \in X$ wint B en anders verliest hij.
   Bewijs dat
   1 Als $n \geq 2^k$, B een winnende strategie heeft.
   2 Als k groot genoeg is, er is een natuurlijke $n \geq 1.99^k$ zodat B geen winnende strategie heeft.

   link

1.7 meetkunde binnen de combinatoriek

Het gebeurt vaak dat er interessante vraagjes over een meetkundige constructie plaats vindt op een grote olympiade.

Men kijkt naar specifieke eigenschappen die vaak logisch zijn en simpel te bewijzen zijn in een lemma.

Enkele goede voorbeelden zijn belangrijk om het principe te verstaan.

1. In het vlak liggen 100 punten, geen drie op n lijn. Beschouw alle moge- lijke driehoeken met drie van deze punten als hoekpunten.
   Bewijs dat ten hoogste 70link

2. Zij $n \geq 5$ een natuurlijk getal. Vind het grootste natuurlijk getal k zodat er een veelhoek bestaat met n hoekpunten (convex of niet, maar niet zelf-snijdend!) die k interne 90° hoeken heeft.

   link

3. Zij $n \geq 3$ een natuurlijk getal. Zij $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eenheidscirkels in het vlak, met middens $O_1, O_2, \ldots, O_n$ respectievelijk. Als geen enkele rechte meer dan twee van de cirkels snijdt, bewijs dan dat
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

   link

4. In een vlak hebben we n rechthoeken met parallelle zijden. De zijden van verschillende rechthoeken liggen op verschillende rechten. De grenzen van de rechthoeken snijden het vlak in verschillende (samenhangende) regio's. Men zegt dat een regio aangenaam is als die minstens n van de hoekpunten van de originele rechthoeken op zijn grenzen heeft. Bewijs dat de som van het aantal hoekpunten van alle aangename regio's minder is dan $40n$ (niet-convexe regio's zijn toegelaten, de rest van het vlak buiten je figuur telt ook als regio).

   link

5. Tien gangsters staan op een vlakke ondergrond, en de onderlinge afstanden tussen hen zijn allemaal verschillend.
   Om klokslag twaalf schiet iedere gangster de dichtstbijzijnde andere gangster neer. Wat is het minimumaantal vermoorde gangsters?
   simpel: Kan je trouwens ook als combinatoriekvraag bewijzen dat het maximum niet 10 is?
   link

6. Ieder paar overstaande zijden van een convexe zeshoek heeft de volgende eigenschap: de afstand tussen hun middens is gelijk aan $\frac{\sqrt{3}}{2}$ keer de som van hun lengtes. Toon aan dat alle hoeken van de zeshoek gelijk zijn.

   link

7. Beschouw een convexe veelhoek P. Aan elke zijde b van P associren we de oppervlakte van de grootste driehoek met b als zijde, die volledig binnen P ligt. Bewijs dat de som van deze oppervlakten minstens dubbel zo groot is als de oppervlakte van P .

   link

1.8 grafentheorie

Een graaf bestaat uit een verzameling V van knopen of vertices, en uit een eindige verzameling E van zijden of edges. Alle zijden zijn paren van knopen. Twee knopen X, Y zijn verbonden als er zijde $\{X, Y\}$ (XY) is.
Hierbij geven we wat uitleg over de terminologie:

- Een propere graaf is een een graaf waarbij iedere zijde verbonden is met een andere zijde en geen enkel punt met zichzelf verbonden is.
- Een gerichte graaf is een graaf waarbij de zijden gericht zijn.
- Een complete graaf K_n is een propere graaf met n punten waarbij iedere 2 punten verbonden zijn met 1 zijde.
- Een k-partiete graaf is een graaf waarvan de set met de punten kan worden verdeeld in k disjuncte deelgrafen waarbij in iedere deelgraaf er geen enkele zijde is die 2 punten uit die deelverzameling verbindt.

  In een bipartite (letterlijk: "2-delige") graaf is de verzameling van knopen V opgesplits in twee delen: V_1 en V_2. De enige toegelaten zijden gaan verbinden knopen van V_1 met knopen van V_2. Er zijn dus geen zijden met twee knopen inV_1, noch met twee knopen in V_2.
- De graad van een knoop k (notatie $d(k)$ of $deg(k)$) is het aantal keren dat k een eindpunt is van een zijde, er geldt uiteraard dat $\sum d(x) = 2|E|$
- een pad is een opeenvolging van verschillende punten die met elkaar verbonden zijn via zijden, indien het start- en eindpunt a en b zijn, is de afstand $d(a, b)$ gelijk aan het aatal zijden bij het kortste pad van a naar b.
- indien bij een pad het eind- en beginpunt hetzelfde is, noemen we het een cyclus
- een graaf is verbonden als voor ieder paar punten er een pad is, die de 2 punten verbindt
- een verbonden graaf zonder cycels heet een boom, een boom heeft exact $n-1$ zijden en minimum 2 punten met afstand 1.
- Een Hamiltoncykel is een cykel die ieder punt exact 1 keer bevat
- een Eulerpad is een pad waarbij alle zijden tot het pad behoren
  Een Eulercycel is een cycel die alle zijden aandoet.
- een planaire graaf is een graaf waarbij de zijden met lijnen kunnen worden getekend die elkaar niet snijden, zo'n graaf met n punten heeft maximaal $3n-6$ punten

stellingen van Euler

Een simpele, samenhangende graaf bevat een Euler-cykel dan en slechts dan als de graad van alle knopen even is.

Een verbonden, planaire graaf met v knopen, e zijden en f gebieden (gebeid= deel van het vlak omringd door zijden), houdt zich aan de regel $v + f = e + 2$, dat geldt dan ook voor de convexe veelvlakken, waarbij f voor het aantal vlakken staat.

stelling van Turan

Als een simpele graaf met $n = t(p-1) + r$ punten met $0 \leq r < p - 1$ meer dan

$$\frac{(p-2)n^2 - r(p-1-r)}{2(p-1)}$$

zijden heeft, bestaat er een K_p die een subgraaf is.

stelling van Hall Neem een bipartiete graaf met X,Y de subgrafen die inwendig geen zijden bevatten:

indien voor elke deelverzameling S van X, de elementen van S samen met minimum $|S|$ elementen van Y verbonden zijn, dan is er een matching die alle elementen van X matcht.

Hierbij is $|X| \geq |Y|$ en bedoelen we met een matching dat ieder punt van X met een uniek punt van Y verbonden is met een zijde (een punt in Y is maximaal 1 keer verbonden).

stelling van Kuratowskil

Een graaf is planair aesa het K_5 en $k_{3,3}$ niet bevat.

stelling van Ramsey

Deze stelling zegt dat een complete graaf met minimum $R_(n_1, \cdots, n_c)$ waarvan de zijden in c kleuren $1, 2 \cdots c$ gekleurd worden, dan bestaat er een complete subgraaf met n_i punten waarvan alle zijden in kleur i gekleurd zijn.

Gekende voorbeelden zijn $R(3,3) = 6, R(3,3,3) = 17$ en in het algemeen is de bovengrens ; $R(\underbrace{3,3,\cdots,3}_{k}) \leq \lfloor k!e \rfloor + 1$

1. Bewijs dat in een groep van 6 personen er 3 personen te vinden zijn die elkaar niet kennen of elkaar wel kennen.

   link

2. Bewijs dat als we een graaf beschouwen die een boom is, er een punt is die tot alle langste paden behoort.

   link

3. De volgende handeling is toegestaan op een eindige graaf: kies een willekeurige cykel van lengte 4 (als er zijn),
   en kies een willekeurig boog in die cykel, en verwijder die van de graaf.
   Voor een vast natuurlijk getal $n \geq 4$, vind het minimum aantal bogen van een graaf dat verwijderd kan worden door herhaaldelijk deze handeling uit te voeren op de complete graaf met n knopen.

   link

4. Zij n een even natuurlijk getal.
   Toon aan dat er een permutatie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van $1, 2, \ldots, n$ bestaat
   zodat voor iedere $1 \leq i \leq n$ het getal x_{i+1} is n van de getallen $2x_i, 2x_i - 1, 2x_i - n, 2x_i - n - 1$ (met $x_{n+1} = x_1$).

   link

5. Bekijk $n \geq 2$ punten op de omtrek van een cirkel met straal 1. Zij q het aantal lijnstukken met de eindpunten in die n punten, met lengte groter dan $\sqrt{2}$. Bewijs dat $3q \leq n^2$.

   link

6. De leden van een internationaal genootschap komen uit 6 verschillende landen. De ledenlijst bevat 1978 namen, genummerd van 1 tot en met 1978. Bewijs dat er ten minste 1 lid is wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee van zijn landgenoten of tweemaal zo groot als het nummer van 1 van zijn landgenoten.

   link

7. Voor een eindige graaf G, stel $f(G)$ gelijk aan het aantal driehoeken en $g(G)$ het aantal viervlakken gevormd door de bogen van de graaf G. Vind de kleinste constante c zodat

   $$g(G)^3 \leq c \cdot f(G)^4$$

   voor elke graaf G.

   link

8. Op een planeet hebben we 2^N landen met $N \geq 4$. Ieder land heeft een vlag met N stroken die naast elkaar liggen. Geen 2 landen hebben er eenzelfde vlag.
   Een verzameling van N vlaggen is divers als we ze kunnen leggen tot een $N * N$vierkant zodat alle N velden/stroken op de hoofddiagonaal dezelfde kleur hebben. Vind het kleinste aantal vlaggen dat we nodig hebben, zodat we er steeds N kunnen vinden die een diverse verzameling kunnen vormen. link

9. $P_1, \cdots P_s$ zijn rekenkundige rijen van gehele getallen. De volgende condities gelden: a) ieder geheel getal behoort tot minstens 1 rekenkundige rij b) iedere rij bevat minimum 1 getal dat geen enkele andere rij bevat Met n noteren we het kgv van de verschillen van de s rijen en schrijf $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ als priemfactorontbinding. Bewijs dat $s \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i(p_i - 1)$.

   link

1.9 veeltermen gebruiken

1. wortels en ontbinding:

   Een niet-constante veelterm van graad n heeft exact n complexe nulpunten (niet noodzakelijk verschillend).

   Indien $P(\alpha_i) = 0$ voor i als $n+1$ waardenis, dus allen een wortel een wortel zijn van een veelterm met graad P, dan is die veelterm de nulveelterm.

2. complexe wortels:

   $\forall n \in \mathbb{N}$ is $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ een eenheidswortel, omdat $\omega_n^n = 1$ en $0 = 1 + \omega_n + \cdots + \omega_n^{n-1} = \frac{\omega_n^n - 1}{\omega_n - 1}$

3. rational root theorem:

   Zij $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ een veelterm met gehele cofficinten en als geldt dat de breuk $\frac{p}{q}$ een wortel van f is met $ggd(p, q) = 1$, dan geldt dat $p|a_0$ en $q|a_n$.

4. delingsalgoritme:

   Zij $f(X)$ een veelterm met domein R met $R = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$of $\mathbb{C}$ dan zijn er veeltermen $p(X), q(X), r(X) \in R[X]$ zodat $f(X) = p(X)q(X) + r(X)$ met de graad van r kleiner dan die van f, hierbij zijn q, r uniek in functie van p.

5. Vieta :

   $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ heeft de n nulpunten z_1 tot z_n, dan geldt dat $\frac{(-1)^i a_{n-i}}{a_n} = \sum_{sym} z_{j1} z_{j2} \cdots z_{ji}$

6. veeltermvergelijkingen:

   Voor alle veeltermen met gehele cofficinten geldt dat $a - b|P(a) - P(b)$ als a, b verschillende gehele getallen zijn.

Een veelterm construeren, kan dus veel informatie geven en eist wat oefenen.

1. Zij $P \in \mathbb{Z}[\mathbb{X}]$ een niet-constante veelterm van graad n.

   Bewijs dat er maximaal $n+2$ gehele a-waarden bestaan zodat $P(a)^2 = 1$.

   link

2. Zij n, k natuurlijke getallen zodat de veelterm $x^{2k} - x^k + 1 | x^{2n} + x^n + 1$. Bewijs dat $x^{2k} + x^k + 1 | x^{2n} + x^n + 1$ ook geldt. link

3. Zij a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 reele getallen zodat $\forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ geldt dat
   $\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2}$
   Vind dan de waarde van $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$?

   link

4. Zij $P(x)$ een veelterm van graad $n > 1$ met gehele cofficinten en k is strikt natuurlijk. We beschouwen de veelterm $Q(x) = P(P(\cdots P(x)))\cdots)$ waarin P k keer voorkwam.
   Bewijs dat er maximaal n gehele getallen bestaan waarvoor geldt dat $Q(t) = t$.

   link

5. Bewijs dat de verzameling van alle reele getallen x die voldoen aan de ongelijkheid

   $$\sum_{k=1}^{k=70} \frac{k}{x-k} \geq 1.25$$

   de vereniging is van een aantal disjuncte intervallen, waarbij de som van de lengtes van die intervallen gelijk is aan 1988.

   link

6. Zij a, b, c, d, e, f 6 strikt natuurlijke getal waarvoor geldt dat $abc + def$ alsook $ab + bc + ca - (df + de + ef)$ deelbaar zijn door $S = a + b + c + d + e + f$. Bewijs dat S meer dan 2 delers heeft. link

1.10 irreducibiliteit

defenitie

Een veelterm $f(x) \in R[x]$ is reducibel als er niet-constante veeltermen $g, h \in R[X]$ bestaan zodat $f(x) = g(x)h(x)$, in het andere geval is f irreducibel.

lemma van Gauss f is irredubel over $\mathbb{Z}$ aesa ze irreducibel is over $\mathbb{Q}$.

criterium van Eisenstein

Zij $f(x) = f_n x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_1 x + f_0$ een veelterm over $\mathbb{Z}$.
Als er een priemgetal p bestaat zodat $p|f_k \ \forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, $p \not| f_n$ en $p^2 \not| f_0$,
dan is $f(x)$ irreducibel over $\mathbb{Z}$.

uitbegreid criterium van Eisenstein

Zij $f(x) = f_n x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_1 x + f_0$ een veelterm over $\mathbb{Z}$.
Als er een priemgetal p bestaat zodat $p|f_k \ \forall k \in \{0, 1, \cdots, t\}$, $p \not| f_{t+1}$ en $p^2 \not| f_0$,
dan geeft $f(x)$ een irreducibele deler van graad $\geq t+1$ over $\mathbb{Z}$.

criterium van Eisenstein voor veeltermen in 2 variabelen

Zij $f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} P_i(x)y^i$ en veronderstel dat $Q(x)|P_i(x)$ voor $i \in \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots, n-1\}$,$Q(x) \not| P_n(x)$ en $Q(x)^2 \not| P_0(x)$, hierbij zijn P_i, Q veeltermen met gehele coefficienten die constant mogen zijn.
Hierbij moest $Q(x)$ een priem/ irreducibele veelterm zijn.
Dan is f irreducibel.

reductie mod p

Zij $f(x) = f_n x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_1 x + f_0$ een veelterm over $\mathbb{Z}$ en p een priemgetal. Als $g(x) = g_n x^n + g_{n-1}x^{n-1} + \cdots + g_1 x + g_0$ de veelterm is met $p|g_i - f_i$ en $g_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$. Als $p \not| f_n$ en $g(x)$ is irreducibel, is $f(x)$ dat ook.

1. Bewijs dat $f(X) = X^n + 5X^{n-1} + 3$ voor $n > 1$ irreducibel is in de gehele getallen. link

2. Bewijs dat volgende polynoom onontbindbaar is in $\mathbb{Z}[x, y]$

$$x^{200}y^5 + x^{51}y^{100} + x^{106} - 4x^{100}y^5 + x^{100} - 2y^{100} - 2x^6 + 4y^5 - 2$$

   link

3. Zij $a_1, a_2 \cdots a_n$ verschillende gehele getallen en beschouw de veelterm $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ Toon aan dat $P(x)$ irreducibel is over $\mathbb{Z}$.

   Bewijs dat ook $\prod(x - a_i)^2 - 1$ irreducibel is over $\mathbb{Z}$. link

4. Als geldt dat $a \in \mathbb{Q}$, bewijs dat dan geldt dat

$$X^{2^n}(X + a)^{2^n} + 1$$

   irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$ voor iedere natuurlijk getal n. link

1.11 genererende functies

Een genererende functie is een veelterm genoteerd als $g_a(z) = \sum_{a\in A} z^a$ waarbij A een deelverzameling is van $\mathbb{Z}$.
$f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$ noemen we de genererende functie van $(a_n)_n$
De technieken die gebruikt worden:

- Een gelijkheid van rijen bewijzen, kan dan door te bewijzen door te tonen dat de genererende functies gelijk zijn.
- Het aantal manieren waarop iets kan, wordt dan makkelijker bepaald als de som en product van verschillende functies.
- De som $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kunnen we in de genererende functie genereren als $\frac{f(X)}{1-X}$
- snake-oilmethod: de som van een bepaalde som berekenen we door de sommen in een rij te steken en de genererende functie van die rij te bepalen, hiervoor proberen we een juiste monische macht te plaatsen, waarna we gekende formules kunnen toepassen

We geven hier de belangrijke genererende functies/Taylorreeksen:

1. $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{n} x^n$
2. $(1+x)^a = \sum_{k\geq 0} \binom{a}{k} x^k$
3. $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$
4. $ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$
5. $sinx = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
6. $cosx = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
7. $Bgtanx = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$

Merk op dat een functie zoals

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0.5[\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-x)^n}{n!}] = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Analoog is

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Zoals altijd kan een voorbeeld iets abstracts verduidelijken en hier is dat zeker nodig:

Voorbeeld 1.7. *Er geldt dat* $n \in \mathbb{N}$ *, we hebben* 2 *verschillende rijen van* n *positieve getallen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *en* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *zodat de sommen*
$a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} + a_n$ *en* $b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ \ldots,\ b_{n-1} + b_n$
dezelfde zijn op een permutatie na. Bewijs dat n *een macht van*2 *is.*

Bewijs. We schrijven de genererende functies als $F(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$ en $G(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}$.
We zien dat

$$\begin{aligned} F^2(x) - G^2(x) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{a_i + a_j}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{b_i + b_j}\right) \\ &= F(x^2) - G(x^2). \end{aligned}$$

Omdat $F(1) = G(1) = n$, hebben we dat 1 een nulpunt is van zekere graad $k, (k \geq 1)$ v.d. veelterm $F(x) - G(x)$.
Dus $F(x) - G(x) = (x-1)^k H(x)$, zodat

$$F(x) + G(x) = \frac{F^2(x) - G^2(x)}{F(x) - G(x)} = \frac{F(x^2) - G(x^2)}{F(x) - G(x)} = \frac{(x^2-1)^k H(x^2)}{(x-1)^k H(x)} = (x+1)^k \frac{H(x^2)}{H(x)}$$

We zien voor $x = 1$ nu dat

$$2n = F(1) + G(1) = (1+1)^k \frac{H(x^2)}{H(x)} = 2^k,$$

zoda $n = 2^{k-1}$.

$\square$

1. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat $\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{2k-1} = F_{2n}$

   link

2. Zij p een oneven priemgetal. Bepaal het aantal deelverzamelingen A van de verzameling $\{1, 2, \cdots 2p\}$ waarvoor geldt: (1) A bevat precies p elementen; (2) de som van alle elementen in A is deelbaar door p.

   link

3. De veeltermen $a(x), b(x), c(x), d(x)$ voldoen aan $a(x^5) + xb(x^5) + x^2c(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)d(x)$. Toon aan dat $a(1) = 0$.

   link

4. $(F_n)_{n\geq 1}$ is de Fibonaccirij met $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \geq 1)$, en $P(x)$ is een veelterm van graad 990 die voldoet aan $P(k) = F_k, \qquad$ voor $k = 992, ..., 1982$. Bewijs dat $P(1983) = F_{1983} - 1$.

   link

5. We noemen een rij $a_0, a_1, \cdots, a_n$ van rele getallen m-gebalanceerd voor een natuurlijke $m \geq 1$ als de sommen
   $a_0 + a_m + \cdots$
   $\sum_{i=0}^{i=[n/m]} a_{im+1}$
   $\cdots$
   $\sum_{i=1}^{i=[n/m]+1} a_{im-1}$
   allen gelijk zijn ([] staat hier voor de entierfunctie)
   Zij $a_0, a_1 \cdots a_{49}$ een gebalanceerde rij voor iedere $m \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
   Bewijs dat $a_0 = \cdots = a_{49} = 0$.

   link

6. Zij $m, n \geq 2$ natuurlijke getallen en $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehele getallen, waarvan er geen enkele een veelvoud is van m^{n-1}. Toon aan dat er gehele getallen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bestaan, niet allemaal gelijk aan 0, met $|e_i| < m$ voor alle i, zodat $e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n$ een veelvoud is van m^n.

   link

7. Zij n een positief geheel getal groter dan 1. Voorts zijn er n in een cirkel geplaatste lampen $L_0, \cdots, L_{n-1}$. Op elk moment is iedere lamp AAN of UIT. Een reeks stappen $S_0, S1 \cdots$ wordt uitgevoerd. Stap S_j heeft alleen invloed op de toestand van L_j (de toestand van alle andere lampen blijft onveranderd) en wel als volgt: (1) als L_{j-1} AAN is, dan verandert S_j de toestand van L_j van AAN naar UIT of van UIT naar AAN; (2) als L_{j-1} UIT is, dan verandert S_j de toestand van L_j niet. De lampen zijn mod(n) genummerd, dat wil zeggen $L_n = L_0$ etcetera. In het begin zijn alle lampen AAN. Bewijs dat (a) er een positief getal $M(n)$ bestaat zodanig, dat na $M(n)$ stappen alle lampen weer AAN zijn; (b) als $n = 2^k, k \in N$, alle lampen weer AAN zijn na $n^2 - 1$ stappen; (c) als$n = 2^k + 1, k \in N$ alle lampen weer AAN zijn na $n^2 - n - 1$ stappen.

   link

8. n, k zijn natuurlijke getallen zodat $k \geq n$ en $2|k - n$. We hebben $2n$ lampen geordend van 1 tot $2n$. In het begin zijn alle lampen uit. Bij iedere stap doen we een lamp branden of doven we een brandende lamp. (we wisselen de status van 1 lamp) Het aantal manieren bestaande uit k stappen om alle lampen van 1 tot n te doen branden en de andere gedoofd te laten, noemen we N. (de lampen van $n+1$ tot $2n$ mogen aan zijn geweest, maar zijn bij het einde uit) Het aantal manieren die behoren tot N, maar waarbij de lampen $n + 1$ tot $2n$ allen gedurende de k stappen gedoofd bleven, noemen we M. Bepaal $\frac{N}{M}$.

   link

uitzonderlijke stellingen

Enkel bij een vraag 3 of 6 kan eens een heel uitzonderlijke stelling voorkomen die nodig is om de vraag op te lossen. Hier enkele voorbeelden (maar bij een IMO-training of dergelijke zelden nodig natuurlijk).

Vandermonde determinant

Als we een matrix hebben van de vorm $V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Dan geldt dat $Det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

basis galoistheorie

$z = a + b\sqrt{d}$ geeft geconjugeerde $z' = a - b\sqrt{d}$ en norm $N(z) = zz' = a^2 - db^2$. $(a, b \in \mathbb{Z})$

i is de imaginaire eenheid en $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

Ieder element van $\mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\omega]$ is uniek te schrijven als het product van priemgetallen.

$\mathbb{Z}[i]$ geeft als priemgetallen de waarden x waarvoor geldt dat $N(x)$ priem is of $|x| \equiv 3 \pmod 4$ en als eenheden $\pm 1, \pm i$.

$\mathbb{Z}[\omega]$ geeft als priemgetallen de waarden x waarvoor geldt dat $N(x)$ priem is of $|x| \equiv 2 \pmod 3$ en als eenheden $\pm 1, \pm \omega, \pm(1+\omega)$.

CNS

$f(z_1, z_2, \cdots, z_k)$ is een polynoom is $F[z_1, z_2, \cdots, z_k]$.

De graad van f, $degf = \sum t_i$ $(t_i \ge 0)$

Veronderstel dat de coefficient van $\prod z_i^{t_i}$ in $f \neq 0$.

Als $S_1, s_2, \cdots, S_k$ deelverzamelingen zijn van F zodat $|S_i| > t_i$ $\forall i \in \{1, 2 \cdots, k\}$,

dan bestaan er $s_i \in S_i$ zodat $f(s_1, s_2, \cdots, s_k) \neq 0$

Voorbeeld 1.8. *We kijken naar het roostervierkant met punten uit* $\{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ *in het vlak van* $\mathbb{R}^2$. *Wat is het minimum aantal cirkels dat we moeten tekenen om alle* 25 *punten te bedekken?*

Bewijs. Ten eerste moet men een configuratie met 5 cirkels vinden.

Stel uit het ongerijmde dat het werkt met 4 cirkels.

We defenieren $P(x, y) := \prod_{i=1}^4 \left((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2 \right)$, als het product van de 4 voorstellingen van de cirkels.

Er geldt dat $\deg(P) = 8 = \big(|S| - 1\big) + \big(|S| - 1\big)$ en de coefficient van $x^4 y^4$ is niet gelijk aan 0. $(t_1 = t_2 = 4)$

Stel $S_1 = S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dus $|S_1| = |S_2| > t_1 = t_2$ zodat CNS zegt dat er s_1, s_2 bestonden zodat $P(s_1, s_2) \neq 0$, contradictie.

$\square$

1. Bepaal alle oplossingen in natuurlijke getallen van m, n die voldoen aan

$$m + n - \frac{3mn}{m+n} = \frac{2011}{3}.$$

link

2. De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wordt gedefinieerd als $a_0 = 2,\ a_{k+1} = 2a_k^2 - 1$ met $k \geq 0$. Bewijs dat als een oneven priemgetal $p | a_n$, dat dan $2^{n+3} | p^2 - 1$. link

3. $n \in \mathbb{N}$ en we beschouwen de verzameling

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}.$$

Bepaal het minimum aantal vlakken die alle punten van S bevat, maar niet het punt $(0, 0, 0)$

link

Diverse combinatoriekvragen

De meeste soorten van combinatoriekvragen konden opgelost worden met 1 van vorige methodes. Het blijft echter creatief denken en daarom is oefenen nog steeds belangrijker dan de uitzonderlijke stellingen.

1. Zij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ een stijgende rij van natuurlijke getallen zodat ieder natuurlijk getal op een unieke manier kan uitgedrukt worden in de vorm $a_i + 2a_j + 4a_k$ met i, j, k niet noodzakelijk verschillend.
   Bepaal a_{1998}. link

2. Gegeven zijn 9 punten in de ruimte met al hun verbindingslijnen, waarbij geen vier punten in een vlak liggen.
   Een aantal verbindingslijnen wordt blauw gekleurd, een aantal rood en de overige blijven ongekleurd.
   Bepaal de kleinste waarde van $n \in N$ met de eigenschap dat als precies n verbindingslijnen gekleurd zijn,
   de verzameling van gekleurde verbindingslijnen een driehoek bevat waarvan de zijden dezelfde kleur hebben.

   link

3. In een eindige rij, geldt er dat iedere opeenvolgende a elementen een strikt negatieve som heeft en iedere opeenvolgende b elementen een strikt positieve som.
   Hoeveel elementen kan de rij maximaal hebben? link

4. In een groep van 120 personen zijn er sommige koppels bevriend.
   Een zwak kwartet is een verzameling van vier personen waarvan er precies 1 koppel bevriend is.
   Wat is het maximum aantal zwakke kwartetten? link

5. Een buitenaards ras heeft drie geslachten: male, female en emale.
   Een getrouwd tripel bestaat uit drie personen, van elk geslacht 1, die allemaal van elkaar houden.
   Een wezen mag hoogstens tot n getrouwd tripel behoren. We gaan er verder van uit dat houden van een wederzijds gevoel is.
   Het ras zendt een expeditie uit om een andere planeet te koloniseren. Er gaan n males, n females en n emales mee. Elk lid van de expeditie houdt van minstens k personen van elk van de andere twee geslachten. De bedoeling is om zoveel mogelijk getrouwde tripels te vormen.
   (a) Toon aan dat als n even is en $k = \frac{n}{2}$, het zelfs niet altijd mogelijk is om 1 getrouwd tripel te vormen.
   (b) Toon aan dat als $k \geq \frac{3n}{4}$, het altijd mogelijk is om n disjuncte getrouwde tripels te vormen en zo alle expeditieleden te trouwen. link

6. n Jongens $a_1, a_2, \cdots a_n$ en n meisjes $m_1, m_2, \cdots, m_n$ zijn op een feestje. Jongens schudden geen handen met elkaar, net zoals de meisjes geen andere vrouwtjes een hand gaven. a_i gaf nooit een hand aan m_i $\forall i \in \{1, 2 \cdots, n\}$. We willen de $2n$ gasten verdelen in t groepen zodat: 1. In iedere groep is het aantal jongens gelijk aan 't aantal meisjes. 2. In iedere groep schudden geen 2 personen een hand aan elkaar.

   m is het aantal koppels (a_i, m_j) die elkaar een hand gaven. Bewijs dat het mogelijk is de groepn te verdelen met $t \leq max(2, \frac{2m}{n} + 1)$. link