De problem-solving-bundel

olympia

augustus 2012

1 algebra

1.1 ongelijkheden

Stelling 1.1. *(AM-GM-HM) Voor* $n \in \mathbb{N}$ $a_1, ..., a_n > 0$ *geldt:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

de triviale benodigdheden
* Kwadraten zijn positief
* ontbindingen
* maximum/minimum beschouwen van de variabelen
* zorgen dat de gelijkheidsgevallen niet verdwenen zijn en in die gevallen nog gelijkheid blijft gelden
(men mag dus de vraag niet te veel vereenvoudigen dat de laatste stappen niet waar meer zijn)

Voorbeeld 1.2. *(IMC 1999) Gegeven reële getallen* $x_1, ..., x_n > -1$*, met* $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$*. Bewijs dat*

$$x_1 + ... + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

Oplossing. Merk op dat

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Voor $x = x_i$ is $(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, aangezien $x_i > -1$. Tellen we dit nu op voor alle x_i dan komt er

$$(x_1^3 + ... + x_n^3) - \frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) + \frac{n}{4} \geq 0$$

$$\frac{3}{4}(x_1 + ... + x_n) \leq \frac{n}{4}$$

Na deling door $\frac{3}{4}$ geeft dit het te bewijzen. $\square$

1. Bewijs dat $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ er geldt dat $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$ en zeg wanneer er gelijkheid geldt.

   voorbeeld

2. Bepaal alle drietallen (x, y, z) die voldoen aan $(x + y)^2 = z$ $(x + z)^2 = y$ $(y + z)^2 = x$

   voorbeeld

3. ABC is een driehoek met $P, Q, R \in [BC], [AC], [AB]$. TB:

$$\min\{[AQR], [BRP], [CQP]\} \leq \frac{1}{4} \cdot [ABC]$$

   link

4. Gegeven dat x, y, z positieve rele getallen zijn die voldoen aan $xyz = 32$, vind de maximumwaarde van

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2.$$

   link

5. Vindt alle positieve getallen zodat $a + b = ab$ en $\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \geq 0.5$.

   klik

6. (*)

   $a, b, c > 0$ zodat $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Bewijs dat $\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$

   klik

7. (*)

   Zij a, b, c rele getallen zodat $ab+bc+ca \leq 3abc$. Bewijs dat $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + 3 \leq \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)$

   klik

8. (*)

   Zij $n \geq 3$ en $a_2, a_3, \cdots, a_n > 0$ zodat

$$\prod_{i=2}^{i=n} a_i = 1.$$

   TB:

$$\prod_{i=2}^{i=n} (1 + a_i)^i > n^n.$$

   klik

9. (enkel passend)

   Bestaat er een polynoom $P(x)$ met 2012 reeele nulpunten zodat

$$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geq 3P(a)P(b)P(c)$$

   geldt $\forall a, b, c, \in \mathbb{R} | a + b + c = 0$?

   http://olympia.problem-solving.be/node/2018

Stelling 1.3. *(Cauchy-Schwarz [CS]) Voor* $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ *geldt:*

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^2.$$

Gelijkheid treedt op als en slechts als $\rho \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \leq 1$.
(de waarde $\frac{a_i}{b_i}$ *constant is voor alle i)*
Dit kan uiteraard worden vervormd in andere vormen zoals:
(Cauchy-Schwarz in Engelvorm) Voor $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *en* $b_1, ..., b_n > 0$ *geldt:*

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

hints:
* homogeniseren; zorgen dat de graad van iedere veelterm gelijk is om passende voorwaarden te mogen stellen en de gewone stellingen te kunnen toepassen
* substituties: vervangen van de variabelen door een combinatie van nieuwe variabelen om de ongelijkheid te vereenvoudigen

Voorbeeld 1.4. $a, b, c > 0$
TB:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Bewijs. Er zijn 2 variabelen in $[0, 1], [1, \infty]$ wegens het duivenhokprincipe. Stel dat dit a, b zijn.
Dan is $(a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq 3(a^2 + b^2 + 1)$ omdat $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$.
$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ vervolledigt het bewijs.

$\square$

oefenen

1. Vind alle oplossingen $x, y, z \in \mathbb{R}^+$: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2010$ $x+y+z=\frac{3}{670}$

   klik

2. De strikt positieve rele getallen p, q, r voldoen aan $p+q+r=1$. Bewijs dat $7(pq+qr+rp) \leq 2+9pqr$.

   klik

3. Zij $a, b, c > 0$ met $abc = 1$. Bewijs dat

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)} \geq 1.5$$

   klik

4. Zij a, b, c drie positieve rele getallen. Bewijs dat

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

   klik

5. Zij $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ met $xyz \geq 1$. Toon aan dat

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq 0.$$

   klik hier

6. (*)

   Bewijs dat voor alle positieve reele getallen a, b, c geldt dat

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

   klik hier

7. (*)

   $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ zodat $x+y+z = xy+yz+zx$ Bewijs dat $\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1} \leq 1$ en zeg wanneer er gelijkheid geldt.

   klik

8. (*)

   $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$ TB: $ab+bc+ac \leq 1.5$

   klik

Stelling 1.5. *(Holder)*
Zij $P_1, p_2, \cdots, p_k \in \mathbb{R}^+ > 0$ *en neem* k *rijen van* n *positieve, rele getallen met* a_{ij} *het element van de* i^{de} *rij en* j^{de} *kolom en* $s = \frac{1}{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}}$ *Dan geldt er dat*

$$\prod_{i=1}^{k} \sqrt[p_i]{a_{i1}^{p_i} + \cdots + a_{i1}^{p_i}} \geq \sqrt[s]{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^s a_{2j}^s \cdots a_{kj}^s}$$

Stelling 1.6. *(Minkowski) Zij* $p > r \in \mathbb{R}^+ > 0$ *en neem* k *rijen van* n *positieve, rele getallen met* a_{ij} *het element van de* i^{de} *rij en* j^{de} *kolom. Dan geldt er dat*

$$\sqrt[r]{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^p)^{\frac{r}{p}}} \geq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^r)^{\frac{p}{r}}}$$

Stelling 1.7. *(gelijkheid bij gelijkheid)*
Wanneer men wil bewijzen dat het extremum optreedt, wanneer alle termen gelijk zijn, is het voldoende uit het ongerijmde een contradictie te bekomen.

Voorbeeld 1.8. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ *Vind het minimum van* $\sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{a_i^2 + \frac{1}{a_i^2}}$?
Bewijs. Stel dat het minimum optreedt bij $(a, b, x_3, x_4, \cdots, x_n)$ in te vullen voor $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ met $a \neq b$
(merk op dat we kunnen permuteren en dus vanaf er 2 getallen niet gelijk zijn)
Het is voldoende te tonen dat $(a, b) \to (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ zorgt dat de uitdrukking kleiner wordt.
$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} > 2\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{(\frac{a+b}{2})^2}}$
kwadraten en $AM - GM, CS$ toont aan dat de ongelijkheid strikt geldt als $a \neq b$.
Er geldt dus dat als het minimum optreedt, alle elementen gelijk zijn; $a_i = \frac{1}{n}$ en dus wordt het minimum $\sqrt{n^4 + 1}$.
***
merk op dat deze vraag ook een direct gevolg is van Minkowski : □

niks beter dan zelf aan de slag te gaan

1. Vind alle $\alpha, \beta > 0$ zodat geldt $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n > 0$ dat $(\sum x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}(\sum y_i^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \geq \sum x_i y_i$

   klik

2. Als $a, b, c > 0$ en $ab + bc + ca = 1$, bewijs dan dat

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

   klik

Stelling 1.9. *(Gewogen Jensen) Zij I een interval, $a_i \in I$, $k_i \in \mathbb{R}_0^+$ en f tweemaal afleidbaar. Als f convex is op I, dan is*

$$\frac{k_1 \cdot f(a_1) + \cdots + k_n \cdot f(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \geq f\left(\frac{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right).$$

Als f concaaf is op I, dan is

$$\frac{k_1 \cdot f(a_1) + \cdots + k_n \cdot f(a_n)}{k_1 + \cdots + k_n} \leq f\left(\frac{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + \cdots + k_n}\right).$$

Gelijkheid treedt op als en slechts als ofwel alle a_i gelijk zijn, ofwel de functie een rechte is.

gevolgen

Stelling 1.10. *(gewogen AM-GM) Voor alle $a_i, k_i > 0$ geldt dat*

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \geq \sqrt[k_1 + \ldots + k_n]{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}}.$$

Stelling 1.11. *(gewogen QM-AM) Voor alle $a_i, k_i > 0$ geldt dat*

$$\sqrt{\frac{k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 + \cdots + k_n a_n^2}{k_1 + \cdots + k_n}} \geq \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}.$$

Stelling 1.12. *(gewogen GM-HM) Voor alle $a_i, k_i > 0$ geldt dat*

$$\sqrt[k_1 + \ldots + k_n]{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}} \geq \frac{k_1 + \cdots + k_n}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2} + \cdots + \frac{k_n}{a_n}}$$

Stelling 1.13. *(Gewogen Power-Mean Ongelijkheid) Als $i > j$ dan is:*

$$f_i(k_m, a_m) \geq f_j(k_m, a_m),$$

gelijkheid als en slechts als alle a_m gelijk zijn. Hierbij staat

$$f_j = \sqrt[j]{\frac{k_1 a_1^j + \cdots + k_n a_n^j}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}}$$

met f_0 het gewogen GM, en $f_{\pm\infty}$ gewoon minimum en maximum resp.

1. Zij $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rele getallen groter of gelijk aan 1. Bewijs dat

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\ldots r_n}+1}.$$

klik

Stelling van Karamata

Deze stelling is de algemenere stelling van Jensen en tonen we hier op zijn algemeenst en zodoende zeer sterke ongelijkheid, de werkelijke stelling van Karamata zegt normaal enkel dat

als $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ majoriseert, dat dan geldt dat

$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$ als f convex is over het interval $[x_1, x_n]$.

De volgende veralgemening die we geven noemen we de uitgebreidde stelling van gewogen Karamata.

Stelling 1.14. *(stelling van Karamata)*

gewogen majorisatie:

Zij $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ *en* $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_m \\ b_1 & b_2 & ... & b_m \end{pmatrix}$ *2 gewogen "reeksen", dan majoriseert* x *de "reeks"*y *als geldt dat*

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_m$, $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$, $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ *and* $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_m$, *alsook*

voor alle indices u *and* v *en alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *waarvoor geldt dat* $0 \leq \alpha \leq 1$ *en* $0 \leq \beta \leq 1$ *gekozen zodat*

$a_1 + a_2 + ... + a_{u-1} + \alpha a_u = b_1 + b_2 + ... + b_{v-1} + \beta b_v$, *geldt dat*

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_{u-1}x_{u-1} + \alpha a_u x_u \geq b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_{v-1}y_{v-1} + \beta b_v y_v$.

We schrijven dit als $(x) \succ (y)$

Nu zegt de uitgebreidde stelling van gewogen Karamata :

Neem de gewogen "reeks"$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ *die de gewogen "reeks"*$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_m \\ b_1 & b_2 & ... & b_m \end{pmatrix}$ *majoriseert.*

Zij I *een interval die de getallen* $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ *bevat en* f *een functie die tweemaal afleidbaar is. Als* f *convex is op* I, *dan is*

$a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + ... + a_nf(x_n) \geq b_1f(y_1) + b_2f(y_2) + ... + b_mf(y_m)$.

Bij een concave functie geldt dit in de andere richting.

hint

Probeer een schets/grafiek te maken om andere eigenschappen van de functie te bekomen die handig zijn om de vraag op te lossen.

1. Zij I een interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een convexe functie. D.w.z. $\forall a, b \in I$ en $\forall \lambda \in [0, 1]$ geldt

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b)) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

   Bewijs dan dat $\forall a, b, c \in I$ met $a < b < c$ geldt dat

$$f(b) + f(a + c - b) \leq f(a) + f(c).$$

   klik

2. Er geldt dat $a + b + c = 1$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
   Vind het maximum van $\frac{1}{a^2-4a+9} + \frac{1}{b^2-4b+9} + \frac{1}{c^2-4c+9}$.
   klik

3. Als $n \geq 2$ een natuurlijk getal is en $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{2n+1}$ zijn reele getallen, bewijs dan dat

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \ldots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} \leq \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

   klik

Stelling 1.15. *(Orde-ongelijkheid voor sommen) Zij* $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, $\cdots$,$x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$ *dan geldt voor alle permutaties* σ, τ*:*

$$\sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \geq \sum\prod\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \cdots & b_{\sigma(n)} \\ c_{\tau(1)} & c_{\tau(2)} & \cdots & c_{\tau(n)} \\ \cdots \\ x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} & \cdots & x_{\tau(n)} \end{pmatrix}.$$

Stelling 1.16. *(Chebychev) Zij* $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, $\cdots$,$x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$ k *gelijkgesorteerde rijen, dan geldt :*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)\cdots(\sum_{i=1}^{i=n} x_i) \leq n^{k-1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdots x_i.$$

Stelling 1.17. *(Orde-ongelijkheid voor producten) Zij* $a_1 \geq ... \geq a_n \geq 0$, $b_1 \geq ... \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq ... \geq c_n \geq 0$, $\cdots$,$x_1 \geq ... \geq x_n \geq 0$ *dan geldt voor alle permutaties* σ, τ*:*

$$\prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \leq \prod\sum\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_{\sigma(1)} & b_{\sigma(2)} & \cdots & b_{\sigma(n)} \\ c_{\tau(1)} & c_{\tau(2)} & \cdots & c_{\tau(n)} \\ \cdots \\ x_{\tau(1)} & x_{\tau(2)} & \cdots & x_{\tau(n)} \end{pmatrix}.$$

terug een rij helpers om in te oefenen

1. Zij $x_1 \leq ... \leq x_n$ en $y_1 \leq ... \leq y_n$. Bewijs dat voor elke permutatie σ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_{\sigma(i)})^2.$$

klik

2. Zij $a_k > 0 \in \mathbb{N}$ met alle a_k verschillend. Bewijs dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

klik

3. Zij $x_1, \ldots, x_n$ rele getallen zodat $|x_1 + \cdots + x_n| = 1$ en $|x_i| \leq \dfrac{n+1}{2}$ voor alle i. Bewijs dat er een permutatie σ bestaat zodat

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i x_{\sigma(i)}\right| \leq \frac{n+1}{2}.$$

klik

Stelling 1.18. *(Schur)* $\forall a, b, c, r > 0$ $a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$ *met gelijkheid a.e.s.a* $a = b = c$
of $f(a)(a-b)(a-c) + f(b)(b-a)(b-c) + f(c)(c-a)(c-b) \geq 0$ *met* f *een strikt stijgende functie.*

Stelling 1.19. *(Muirhead) Als* $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, *en* $x_i > 0$, *dan geldt:* $\forall x_i \in \mathbb{R}^+ : \sum_{sym} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \geq \sum_{sym} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$

minder belangrijke stellingen:

Stelling 1.20. *(Bernoulli)* $\forall x_i \geq -1$ *met alle* x_i *hetzelfde teken geldt dat* $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$

Stelling 1.21. *(Maclaurin) Zij* $S_k = \frac{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik}}{\binom{n}{k}}$ *(gemiddelde van de termen van de ontbinding van* $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$ *met graad* k*) Dan geldt dat* $f_i \geq f_j$ *als* $i \leq j$ *met* $f_i = \sqrt[i]{s_i}$

Stelling 1.22. *(Newton) Bij de eig. van Maclaurin geldt ook dat* $S_k^2 \geq S_{k-1}S_{k+1}$

1. Zij x, y, z positieve reele getallen zodat $xyz = 1$. Bewijs dat

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

   klik

2.

Stelling 1.23. *(extremeaaltechniek)*
Als een functie f convex of lineair is in alle variabelen $x_1, \cdots, x_n$,
geldt dat het maximum optreedt wanneer alle variabelen gelijk zijn aan het minimum of maximum.

Voorbeeld 1.24. *(IMOLL Peter Vandendriessche)*
Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal en zij $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \geq 0$. Toon aan dat

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \left(\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right)^2 \geq \sqrt[n]{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \cdots (x_n^2 + y_n^2)}.$$

Bewijs. □

oefenen

1. Als $k \geq v, w, x, y, z \geq h > 0$, toon dan aan dat

$$(v+w+x+y+z)\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq 25 + 6\left(\sqrt{\frac{h}{k}}-\sqrt{\frac{k}{h}}\right)^2.$$

   Wanneer treedt gelijkheid op?

   klik

2. (*)

   Voor iedere $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ geldt dat $x_i > 0, x_i y_i > z_i^2$ waarbij alle getallen reel zijn. Bewijs dat: $\frac{n^3}{(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n z_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i - z_i^2}$ ** Op de IMO was dit voor het specifieke geval $n = 2$.

   klik

de laatste loodjes bij onze ongelijkheden

Stelling 1.25. *(Lagrange multipliers)*
Zij gegeven dat $f(a_1, ..., a_n) = r$ dan kan men extremums van de functie $g(a, b \cdots, x)$ bekomen door het oplossen van $g(a_1, ..., a_n) + \lambda[f(a_1, ..., a_n) - r]$ af te leiden naar 1 variablele, wiens afgeleide 0 moet zijn om een extremum te bekomen, waardoor bij symmetrische functies de juiste waarde van λ het gevraagde simple aantoont.

Stelling 1.26. *(EMV-stelling) Zij f een continu functie en $[f]$ is de som van de afgeleiden in iedere variabele. De ongelijkheid $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ met $x_i \geq 0$ geldt als :*
$(i).f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ if $x_1x_2...x_n = 0$. $(ii).[f] \geq 0$ $\forall x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.
(geldt niet noodzakelijk in omgekeerd)

Voorbeeld 1.27.

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2(b^2 + c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)) + c^2d^2$$

Equivalent met $F = \sum_{cyc} a^4 + 2abcd - \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 0$

Bewijs. i $d = 0$, dan $AM - GM$ geeft dat het klopt.
ii $[F] = 4\sum_{cyc} a^3 + 2\sum_{cyc} abc - 2\sum_{cyc} ab(a + b) \geq 0$ (sommatie van Schur-ongelijkheden)

□

1. $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a + b + c + d = 19$ en $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 91$.Vind het maximum dat mogelijk is voor de uitdrukking $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

   klik

Diverse Ongelijkheden oefeningen

1. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve rele getallen zodat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 1$. Bewijs dat
$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n))}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$
   klik
2. $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ geldt voor de positieve getallen a, b, c.
   Vind het maximum dat $(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab)$ kan aannemen.
   klik
3. Gegeven zijn reele getallen $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
   Definieer $d_i = max\{a_j | 1 \leq j \leq i\} - min\{a_j | i \leq j \leq n\}$ voor elke i tussen 1 en n en laat $d = max\{d_i | 1 \leq i \leq n\}$.
   (a) Bewijs dat voor alle getallen $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \in \mathbb{R}$ geldt dat
$$max\{|x_i - a_i| | 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}$$
   [1]
   (b) Bewijs dat er zo'n rij $(x_n)_n$ was zodat er gelijkheid geldde in [1].
   klik

1.2 polynoom vergelijkingen

Bij zowel polynoom- als functievergelijkingen zijn er 2 grote dingen die men moet doen:
*aantonen dat de andere mogelijkheden niet voldoen
* bewijzen dat de gevonden functies altijd voldoen aan je vergelijking.

Bij veeltermvergelijkingen geeft men het voordeel dat men de hoogstegraadsterm kan bekijken en hieruit conclusies trekken en als dit begrensd is, de volledige polynoom te kunnen invullen. (wat men niet kan bij een functievergelijking)

oefeningen

1. Vind alle veeltermen $P(x)$ met rele cofficinten die voldoen aan

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

voor alle drietallen a, b, c van rele getallen met $ab+bc+ca=0$.

klik

2. Bewijs dat iedere monische veelterm van graad n met rele cofficinten het rekenkundig gemiddelde is van twee monische veeltermen van graad n met n rele wortels.

klik

3. Vind alle rele veeltermen $p(x,y)$ zodanig dat $p(x,y)p(u,v)=p(xu+yv,xv+yu)$ voor alle $x,y,u,v\in\mathbb{R}$.

klik

4. Vind alle polynomen $a+b+c|P(a)+P(b)+P(c)$ met gehele cofficinten als $a+b+c\neq 0$ en alle 3 gehele getallen zijn.

klik

5. Bepaal alle homogene veelteren $F(x,y)\in\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ zodat $f(1,0)=0$ en zodat $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ geldt dat $f(a+b,c)+f(b+c,a)+f(a+c,b)=0$. klik

In het algemeen kan men HIER oefeningen over veeltermen bekijken.

1.3 functievergelijkingen

Het is vooral creatief zijn en volgende middelen kunnen helpen:

* waarden zoeken die de functievergelijking reduceren tot iets dat gemakkelijk aantoont dat bepaalde oplossingen niet kunnen voldoen/ met kleine waarden op ideen komen,
transformaties uitvoeren die de voorwaarden behouden maar de vergelijking behouden en eventueel een goed gevalsonderscheid

* kijken naar sur-,bi- of injectiviteit:

injectieve functies beelden alle originelen op verschillende functiewaarden af, dus $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

surjectieve functies: er is geen enkele waarde uit het codomein die geen functiewaarde is

bijectiviteit: injectiviteit en surjectiviteit ineen

* $f(x) = g(x) + h(x)$ stellen, dit kan helpen als er slechts 1 functie g is die voldoet, bij het invullen van $g(x) + h(x)$ kan men men proberen aan te tonen dat $h(x)$ de nulfunctie is.

* dek- of fixpunten zoeken, dit zijn waarden die gelijk zijn aan hun functiewaarden: $f(x) = x$ Dit is vooral handig bij functies waar het aantal fixpunten klein is, aangezien anders niet veel te concluderen valt.

* $f^{n+1}(x)$ op meerdere manieren opvatten, waardoor bepaalde dingen duidelijk komen: $f(f^n(x)) = f^n(f(x))$

* eventueel in een bepaalde basis kijken naar de getallen en voorwaarden in functie van die representatie te bekomen.

* de waarden zoeken waarvoor geldt dat $f(x) = 0$, indien dit slechts 1 waarde is, helpt het vaak deze waarde elders in te vullen om de vergelijking te verkorten.

* bij polynoomvergelijkingen de hoogstegraadsterm vinden om de algemene formule kort te kunnen gebruiken.

* de Cauchy-vgl'en:

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ geeft enkel de opl. $f(x) = cx$
$f(xy) = f(x) + f(y)$ " $f(x) = cln|x|$
$f(xy) = f(x)f(y)$ " $f(x) = x^c$ of $\equiv 0$.
$f(x + y) = f(x)f(y)$ " $f(x) = c^x$
met $x, y \in \mathbb{R}$
als er geweten is dat de functie 1 van volgende eigenschappen geeft:

monotoom/continu/stijgend of dalend/begrensd

* kijk eventueel ook naar de moduloresten in het domein/codomein

1. Zoek alle functies f$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat er geldt dat

   $f([x]y) = f(x)[f(y)]$.

   *** Hierbij wordt met $[x]$ de entierfunctie bedoelt die een getal afrond naar beneden op zijn geheel deel.

   klik

2. Vind alle functies $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

   $$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$$

   voor alle rele x, y.

   klik

3. Bepaal alle functies $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat

   $$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

   klik

4. Bepaal alle functies $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die voldoen aan de gelijkheid

   $$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2[f(a)f(b) + f(a)f(c) + f(c)f(b)]$$

   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ zodat $a + b + c = 0$. klik

5. $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))\forall x, y \in \mathbb{R}$ TB: $f(x) = 0$ $\forall x \leq 0$.

   klik

Voor meer voorbeelden om te proberen, kun je hier f-vgl.'en vinden.

Het gebeurt vrij regelmatig dat een functievergelijking moet opgelost worden met eigenschappen, lemma's en werkwijzes uit de getaltheorie.

Functievergelijkingen in meerdere functies zijn speciale, waarbij terug elegant moet gedacht worden.

Het focussen op de vorm van 1 v.d. functies is soms handig, maar ook ongelijkheden en inductie kunnen helpen.

Het is hier terug belangrijker voorbeelden te zien, omdat er niet echt veel specifieke theorie over is.

1. $\forall a, b \in \mathbb{N}$ geldt $(a-b)|f(a)-f(b)$ waarbij f geen constante functie is. Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, die een deler zijn van een functiewaarde.

   klik

2. $f, g\mathbb{N} \to \mathbb{N} f(g(n)) = f(n) + 1, g(f(n)) = g(n) + 1, n \in \mathbb{N}$ TB: $f(n) = g(n) \forall n \in \mathbb{N}$

   klik

3. Vind alle surjectieve functies die voldoen aan $p|f(m+n)$ a.e.s.a. $p|f(m) + f(n)$ waarbij $m, n \in \mathbb{N}$ zijn.

   klik

4. Vind alle paren (f, g) van functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat

   $$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$$

   $\forall x, y \in \mathbb{R}$. klik

5. Vind alle paren (f, g) van functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat

   $$f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$

   $\forall n \in \mathbb{N}$. Hierbij is $f^k(n) = \underbrace{f(f(\cdots f(n))) \cdots)}_{k*f}$. klik

6. Zij $\mathbb{N}_0$ de verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0. Zoek alle functies $g\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zodat $(g(m)+n)(g(n)+m)$ een volkomen kwadraat is$\forall m, n \in \mathbb{N}_0$

   klik

7. $f\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ voldoet aan $f(m-n)|f(m) - f(n) \forall m, n \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat als $f(m) \leq f(n)$ dat $f(m)|f(n)$.

   klik

1.4 rijen

Een onderwerp met geen specifieke theorie.

Vaak komt er iets voor uit de algemene combinatoriek aan te pas zoals inducties, contradictie en dergelijke.

Een recursie op stellen en dergelijke komt niet puur voor.

Er is dus niks beter dan er goede voorbeelden van te zien:

1. Vind het kleinste natuurlijk getal met de volgende eigenschap: er bestaat geen rekenkundige rij van 1999 rele getallen die precies n gehele getallen bevat.

   klik

2. Definieren we een rij van rijen als volgt: $R_1 = 1$ en als $R_{n-1} = (a_1, \ldots, a_s)$, dan is $R_n = (1, 2, \ldots, a_1, 1, 2, \ldots, a_2, 1, 2, \ldots, \ldots, \ldots, 1, 2, \ldots, a_s, n)$. Bijvoorbeeld, $R_2 = (1, 2)$ en $R_3 = (1, 1, 2, 3)$. Bewijs dat als $n \geq$, dan is de k-de term van links in de rij R_n gelijk aan 1 als en slechts als de k-de term van rechts in de rij R_n verschillend is van 1.

   klik

3. Zij $a_1, a_2, \cdots$ een rij van positieve rele getallen. Veronderstel dat er een natuurlijk getal s is zodat $a_n = max\{a_k + a_{(n-k)} | 1 \leq k \leq n-1\}$ voor alle $n > s$. Bewijs dat er natuurlijke getallen l en N bestaan met $l \leq s$ en zodat $a_n = a_l + a_{(n-l)}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   klik

4. Zij $s_1, s_2, s_3, \ldots$ een strikt stijgende rij van natuurlijke getallen zodat de subrijen $s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots$ en $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$ beiden rekenkundige rijen zijn. Bewijs dat de rij$s_1, s_2, s_3, \ldots$ zelf een rekenkundige rij is.

   klik

5. Zij n een natuurlijk getal en zij $a_1, a_2, \cdots, a_n$ verschillende natuurlijke getallen zijn. Er zijn $n-1$ getallen tussen 1 en $\sum_{i=1}^{i=n} a_i - 1$ gekozen in de verzameling M waar mensen hem willen vangen. De sprinkhaan start in het punt 0 en maakt n sprongen met de lengten a_1 tot a_n, bewijs dat hij die volgorde kan kiezen zodat hij nergens wordt gevangen in een punt van M.

   klik

Verder kan men zoeken voor RIJvoorbeelden voor extra problemen indien gewenst.